Title: Über die Picard'schen Gruppen aus dem Zahlkörper der dritten und der
vierten Einheitswurzel

Author: Otto Bohler

Release Date: October 4, 2010 [EBook #34032]

Language: German

Character set encoding: ISO-8859-1

Produced by Joshua Hutchinson, Keith Edkins and the Online
Distributed Proofreading Team at http://www.pgdp.net (This
file was produced from images from the Cornell University
Library: Historical Mathematics Monographs collection.)

Über die Picard'schen Gruppen aus dem Zahlkörper der dritten und der vierten Einheitswurzel.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der philosophischen Doktorwürde

vorgelegt der

Hohen philosophischen Fakultät
(Mathematisch-naturwissenschaftliche Sektion)

der

UNIVERSITÄT ZÜRICH

von

Otto Bohler
aus Seengen (Aargau).

Begutachtet von den Herren
Prof. Dr. H. Burkhardt
Prof. Dr. A. Hurwitz.

Zürich
Druck von Zürcher & Furrer
1905

Inhalts-Verzeichnis.

I. Einleitung.

Seite

II. Die Picardsche Gruppe.

III. Die Picardsche Gruppe aus dem Zahlkörper der dritten Einheitswurzel.

I. Einleitung.

§ 1.
Stellung der Aufgabe.

Das Ziel, das die vorliegende Arbeit im Auge hat, ist möglichst allgemein gefasst das folgende:

Wir betrachten eine beliebige Gruppe von linearen Transformationen; sie werde mit Γ bezeichnet und es soll S eine aus der Gesamtheit derselben beliebig herausgegriffene spezielle Transformation bedeuten. Nun suchen wir im zwei- oder mehr-dimensionalen Raume R jeder Transformation S der Gruppe Γ eindeutig ein geometrisches Gebilde σ zuzuordnen. Dasselbe kann je nach Wahl ein Punkt, eine Linie, eine Fläche oder ein drei- oder mehr-dimensionierter Körper sein. Nehmen wir den Raum R, wie das später auch wirklich geschehen wird, so an, dass in ihm die Gruppe Γ eigentlich diskontinuierlich [1]) ist, dann wird σ in irgend einem Zusammenhange stehen mit dem Diskontinuitätsbereich derselben. Umgekehrt entsprechen dann auch jedem Gebilde σ ein oder mehrere jedoch nur endlich viele Transformationen S.

Nunmehr betrachten wir irgend eine Klasse von Formen, f sei ein beliebiges Individuum derselben, und suchen auch im Raume R ein zweites geometrisches Gebilde, das wir der Form f eindeutig als Repräsentanten (f) derselben zuordnen wollen.

Wenn wir σ und (f) geeignet wählen, so wird es immer möglich sein, eine einfache Invariante zwischen ihnen zu finden, und in dieser erhält dann die Theorie der Transformationen, die der Gruppe Γ angehören, für eine Form der betreffenden Klasse eine sichere Basis. Vermutlich wird es auch möglich sein, eine Invariante zu finden, die in irgend einer Weise die Punkte des Diskontinuitätsbereiches der Gruppe Γ charakterisiert.

Handelt es sich z. B. um die Gruppe der reellen unimodularen Substitutionen, angewendet auf irgend eine binäre quadratische Form, so genügt es, als Raum R die Ebene anzunehmen [2]); besitzt jedoch die Gruppe Γ und mit ihr die Formenklasse einen mannigfaltigeren Aufbau, so reicht die Ebene zur Interpretation nicht mehr aus, wir müssen den Raum von drei und mehr Dimensionen zu Hülfe nehmen.

In der hier vorliegenden Abhandlung ist das eben ausgesprochene Problem gelöst für den Fall, dass die betrachtete Form eine definite Hermitesche Form, bezw. eine

---

[1]) Der Begriff „eigentlich diskontinuierlich“ ist entnommen aus dem Buche: „Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen“ von Fricke und Klein; vgl. daselbst I. Band, pg. 62 u. ff.
Da wir späterhin noch gelegentlich auf dieses Werk zu verweisen haben, so wollen wir es künftig kurz mit Aut. I (bezw. Aut. II) bezeichnen, unter Anfügung der bezüglichen Seitenzahlen.

[2]) Vgl.: „Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen“ von Klein. Dort ist die Theorie der fraglichen Transformationen vollständig übertragen auf Untersuchungen in der sog. ζ-Halbebene, bezw. im Innern einer Ellipse, die als absolutes Gebilde einer hyperbolischen Massbestimmung anzusehen ist.
Vgl. auch die Abhandlung: „Über die Reduktion der binären quadratischen Form“ von Hurwitz, in Bd. 45 der Math. Annalen. Diese letztere knüpft ihre Untersuchungen ganz an die Betrachtung der hyperbolischen Ebene. Von einer Invariante zwischen σ und (f) wird in keiner der beiden eben zitierten Abhandlungen Gebrauch gemacht. Dagegen hat mir Herr Hurwitz ein noch unveröffentlichtes Manuskript zur Einsicht überlassen, worin auf eine solche Invariante wenigstens für den Fall der definiten binären quadratischen Form hingewiesen ist.

Dirichletsche Form ist, während die Gruppe Γ alle linearen Transformationen

$$u = \frac{\alpha u' + \beta}{\gamma u' + \delta}$$

umfasst, deren Koeffizienten der Bedingung genügen

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

und die entweder ganze komplexe Zahlen oder aber ganze Zahlen von der Gestalt $u + \varrho \cdot v$ sind, wo ϱ eine imaginäre dritte Einheitswurzel bedeutet. Der Terminologie von Fricke folgend, haben wir im Titel die erstere Gruppe als Picardsche Gruppe aus dem Zahlkörper der vierten, die letztere als Picardsche Gruppe aus dem Zahlkörper der dritten Einheitswurzel bezeichnet; doch werden wir fernerhin, wo eine Zweideutigkeit ausgeschlossen ist, die erstere Gruppe, wie allgemein gebräuchlich, kurz Picardsche Gruppe nennen.

Im ersten Abschnitte, Kap. I § 6 auf p. 76 u. ff. der Aut. I. Bd. haben die Verfasser bereits ausgesprochen, dass die Picardsche Gruppe erst im drei-dimensionalen Raum (dort ζ-Halbraum genannt) eigentlich diskontinuierlich ist.

Während für die rein geometrischen Einsichten, die die Verfasser in dem eben zitierten Werke bezwecken, die Anschauung im ξ-Halbraum ihre unbedingten Vorteile hat, empfiehlt es sich, den vorstehenden Untersuchungen nicht diesen ζ-Halbraum zu grunde zu legen, sondern vielmehr das Innere einer Kugel, die wir als absolutes Gebilde einer hyperbolischen Massbestimmung ansprechen wollen. Das Kugelinnere ist dann unser Raum R.

Die geometrischen Repräsentanten σ und (f) werden dann einfacheren Charakters, und mit diesen auch die Invarianten, auf die wir die Theorie der Transformationen basieren.

§ 2.
Darstellung der komplexen Zahlen durch die Punkte einer Kugel. [1])

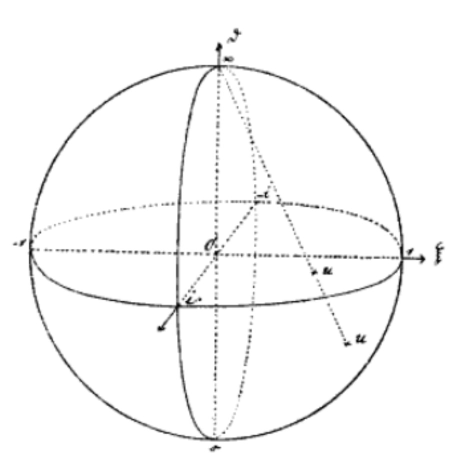
In § 1 wurde erwähnt, dass wir unsere Untersuchungen vorteilhaft anknüpfen an die Betrachtung eines hyperbolischen Raumes. Unser erstes Ziel ist die Einführung dieses Raumes.

Die Ebene der komplexen Zahlen u sei $\xi\,\eta$-Ebene in einem rechtwinkligen räumlichen Koordinatensystem $(\xi\,\eta\,\theta)$ derart, dass die ξ- und die η-Achse dieses letztern sich decken sollen mit der Achse der reellen bezw. derjenigen der rein imaginären Zahlen.

Durch stereographische Projektion vom Punkte $(0\,0\,1)$ aus ordnen wir eindeutig jedem Punkte der Ebene der komplexen Zahlen einen Punkt der Kugel

$$\mathfrak{K} : \xi^2 + \eta^2 + \theta^2 = 1$$

zu; $\mathfrak{K}$ sei abkürzende Bezeichnung für dieselbe.



[1]) Man vgl. dazu Aut. I, p. 44 u. ff.

Ist u die komplexe Zahl, die einem bestimmten Punkte der $\xi\,\eta$-Ebene entspricht, so soll dieselbe Zahl auch dem korrespondierenden Punkte von $\mathfrak{K}$ als Parameter beigelegt werden. Der Kürze des Ausdruckes wegen wollen wir auch fernerhin unter u nicht nur den Parameter des Kugelpunktes, sondern auch diesen selber verstehen.

Ist u eine beliebige komplexe Zahl, so soll in Zukunft immer die Anfügung des Index 0 an dieselbe, also u_0, die zu jener konjugiert komplexe Zahl bedeuten.

Zwischen den Koordinaten $(\xi\,\eta\,\theta)$ und dem Parameter u des Kugelpunktes findet man die folgenden Beziehungen

$$\frac{\xi}{1-\theta} = \frac{u+u_0}{2}, \qquad \frac{\eta}{1-\theta} = \frac{u-u_0}{2i}.$$

und aus diesen folgt an Hand der Gleichung für $\mathfrak{K}$:

$$1+\theta : \xi + i\eta : \xi - i\eta : 1-\theta = uu_0 : u : u_0 : 1. \tag{1}$$

Sind $(\xi\,\eta\,\theta)$ die Koordinaten eines beliebigen Raumpunktes, so wollen wir vier Zahlen $(x\,y\,y_0\,z)$, von denen x und z reell, y und y_0 aber konjugiert komplex sind, bilden, die den Proportionen

$$x : y : y_0 : z = 1+\theta : \xi + i\eta : \xi - i\eta : 1-\theta \tag{2}$$

genügen. Sie sind dadurch bis auf einen reellen, unbestimmt bleibenden Faktor eindeutig bestimmt. Wir sprechen dieselben an als homogene Koordinaten des betreffenden Punktes. Das hierbei zugrunde gelegte Koordinatentetraeder ist gebildet von Tangentialebenen in den Punkten 0 und ∞ an die Kugel $\mathfrak{K}$ und von zwei konjugiert imaginären Ebenen, die sich in der θ-Achse des ursprünglichen Koordinatensystemes schneiden; es sind die durch die θ-Achse an die Kugel $\mathfrak{K}$ gehenden Tangentialebenen.

Zufolge (1) und (2) werden die homogenen Koordinaten des Kugelpunktes u aus

$$x : y : y_0 : z = uu_0 : u : u_0 : 1 \tag{3}$$

erhalten, woraus umgekehrt

$$u = \frac{y}{z}, \qquad u_0 = \frac{y_0}{z}, \qquad uu_0 = \frac{x}{z} \tag{4}$$

folgt. Wie man aus (4) ersieht, genügen die Koordinaten der Kugelpunkte der Gleichung

$$yy_0 - xz = 0, \tag{5}$$

es ist dies die Gleichung der Kugel $\mathfrak{K}$ in unsern Koordinaten.

Diese Kugel werden wir in der Folge ansehen als absolutes Gebilde einer hyperbolischen Massbestimmung, die im Innern von $\mathfrak{K}$ reell sein soll, und diesen hyperbolischen Raum fassen wir auf als denjenigen Raum R, von dem wir im vorangehenden Paragraphen gesprochen haben.

Wir wollen noch einige Bemerkungen folgen lassen.

Nach (2) ist

$$yy_0 - xz = \varrho^2(\xi^2 + \eta^2 + \theta^2 - 1),$$

wo ϱ einen reellen Proportionalitätsfaktor bedeutet. Für Punkte im Innern von $\mathfrak{K}$ ist $\xi^2+\eta^2+\theta^2-1<0$, daher:

1. Bemerkung. Ist $(x\,y\,y_0\,z)$ ein Punkt im Innern der Kugel $\mathfrak{K}$, so genügen seine Koordinaten der Ungleichung
$$yy_0 - xz < 0. \tag{6}$$

Da es bei den homogenen Koordinaten eines Punktes nur auf das Verhältnis $(x : y : y_0 : z)$ ankommt, so kann man ohne Störung der Allgemeinheit ein für allemal die Voraussetzung treffen $x \geqq 0$. Wir sagen:

2. Bemerkung. Sind $(x\,y\,y_0\,z)$ die homogenen Koordinaten eines beliebigen Raumpunktes, so soll immer $x \geqq 0$ sein. Ist dieser Punkt ein innerer Punkt der Kugel $\mathfrak{K}$, so folgt aus (6), dass nicht nur $x > 0$ ist, sondern auch $z > 0$ sein muss.

Ferner, sind $(a\,b\,b_0\,c)$ die homogenen Koordinaten eines beliebigen aber festen Punktes, und sind ferner u und v komplexe Veränderliche, dann kann man die Koordinaten eines variablen Punktes $(x\,y\,y_0\,z)$ der Kugelfläche in folgender Weise durch die Veränderlichen u und v ausdrücken

$$x : y : y_0 : z = vv_0 : -u_0v : -uv_0 : uu_0 \tag{7}$$

— vgl. (3) indem man dort an Stelle von $u - \dfrac{v}{u}$ einsetzt. — Nun ist die Gleichung der Polarebene des Punktes $(a\,b\,b_0\,c)$ bezüglich der Kugel $\mathfrak{K}$ in den laufenden Koordinaten (x, y, y_0, z) die folgende
$$cx - b_0y - by_0 + az = 0. \tag{8}$$

Für alle Punkte des Raumes, die auf ein und derselben Seite dieser Ebene liegen, hat daher das Polynomen der linken Seite von (8) beständig dasselbe Vorzeichen. Setzt man nun an Stelle von $(x\,y\,y_0\,z)$ gemäss (7) die Variablen u und v ein, so wird der Ausdruck

$$auu_0 + buv_0 + b_0u_0v + cvv_0 \tag{9}$$

für alle Kugelpunkte, die auf derselben Seite der Polarebene des Punktes $(a\,b\,b_0\,c)$ liegen, dasselbe Vorzeichen besitzen.

Hat mithin die Polarebene (8) mit der Kugel $\mathfrak{K}$ keinen Punkt gemeinschaftlich, so hat für alle Punkte derselben das Polynom (9) dasselbe Vorzeichen. Nach Bemerkung 2 ist $a > 0$, so erkennt man, dass etwa für den Kugelpunkt $(0\,0\,0\,1)$, wo $u = 1$, $v = 0$ zu nehmen ist
$$auu_0 + buv_0 + b_0u_0v + cvv_0 = a > 0$$
wird. Es folgt daraus:

3. Bemerkung. Ist der Punkt $(a\,b\,b_0\,c)$ ein innerer Punkt der Kugel, genügen also seine Koordinaten nach (6) der Ungleichung

$$bb_0 - ac < 0,$$

dann ist für alle Punkte von $\mathfrak{K}$, d. h. für alle Werte von u und v die Ungleichung erfüllt

$$auu_0 + buv_0 + b_0u_0v + cvv_0 > 0.$$

§ 3.
Hülfssatz.

Wir lassen hier zunächst einen Hülfssatz folgen, der sich bezieht auf das Minimum einer rationalen homogenen Funktion, wenn die Veränderlichen nur diskrete Wertesysteme durchlaufen.

Der Kürze des Ausdruckes wegen wollen wir n beliebige reelle Werte $(x_1\,x_2\,\ldots\,x_n)$ als Koordinaten eines Punktes P im n-dimensionalen Raum auffassen. Mit M wollen wir die Gesamtheit derjenigen Punkte bezeichnen, für welche

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$$

erfüllt ist.

Es sei nun F eine reelle, ganze, rationale, homogene Funktion N^{ten} Grades, wo $N > 0$ vorausgesetzt werde, der n Veränderlichen $x_1\,x_2\ldots x_n$.

F wird innerhalb der Menge M ein gewisses Minimum m und ein gewisses Maximum M erreichen, die beide dasselbe Vorzeichen haben[1]) und es ist dann für jeden Punkt von M

$$m \leqq F(x_1\,x_2\ldots x_n) \leqq M$$

erfüllt.

Bedeuten nun $x_1\,x_2\ldots x_n$ die Koordinaten eines beliebigen Punktes des Raumes, der vom Punkte $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ verschieden ist, so lässt sich der Faktor ϱ immer so bestimmen, dass der Punkt $\varrho x_1, \varrho x_2, \ldots \varrho x_n$ der Menge M angehört, es muss nur

$$\varrho = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}}$$

sein. Da nun N der Grad der Funktion F ist, so muss für einen solchen Punkt die Beziehung $m \leqq \varrho^N \cdot F(x_1\,x_2\ldots x_n) \leqq M$ oder also

$$m \cdot \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}^{\,N} \leqq F(x_1\,x_2\ldots x_n) \leqq M\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}^{\,N} \qquad (1)$$

erfüllt sein.

Nimmt man nun an $x_1\,x_2\ldots x_n$ seien nicht kontinuierlich veränderlich, sondern es handle sich nur um solche Wertesysteme $x_1\,x_2\ldots x_n$, die aus n ganzen rationalen, nicht sämtlich verschwindenden Zahlen gebildet sind; dann gilt der Satz:

> „Es wird $F(x_1\,x_2\ldots x_n)$ für ein oder mehrere, aber immer nur für endlich viele solcher Wertesysteme zu einem Minimum.“

Denn, sei G der Wert, welchen $F(x_1\,x_2\ldots x_n)$ für irgend ein ganzzahliges System $x_1 = x_1^0,\ x_2 = x_2^0,\ \ldots,\ x_n = x_n^0$ annimmt, diejenigen Wertesysteme $x_1\,x_2\ldots x_n$, für welche

$$F(x_1\,x_2\ldots x_n) \leqq G$$

wird, müssen dann zufolge (1) auch der Bedingung

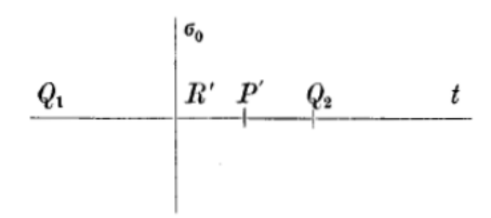
$$m \cdot \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}^{\,N} \leqq G$$

[1]) Wir wollen das + voraussetzen.

genügen. Da nach Voraussetzung $m > 0$ und $N > 0$ ist, so erkennt man, dass es solcher Wertesysteme nur endlich viele geben kann, und unter diesen müssen auch diejenigen enthalten sein, für welche $F(x_1\, x_2 \ldots x_n)$ zu einem Minimum wird, womit die Richtigkeit des obigen Satzes bewiesen ist.

§ 4.
Der hyperbolische Abstand des Punktes $(a'\, b'\, b_0'\, c')$ von der Sehne $(0, \infty)$.

Wie schon früher angedeutet, fassen wir nun das Innere der Kugel $\mathfrak{K}$ auf als hyperbolischen Raum. $(a'\, b'\, b_0'\, c')$ seien die Koordinaten eines beliebigen Punktes P' desselben, $\sigma_0 = (0, \infty)$ soll die im Innern von $\mathfrak{K}$ gelegene Verbindungssehne der Kugelpunkte 0 und ∞ bedeuten. Die Entfernung des Punktes P' von der Sehne σ_0 wird dann in der folgenden Weise erhalten. Wir denken uns die Polare τ_0 zu σ_0 konstruiert, es ist das die unendlich ferne Gerade der $\xi\,\eta$-Ebene des ursprünglichen Koordinatensystems. σ_0 und τ_0 bestimmen dann mit dem Punkte P' je eine Ebene, diese beiden Ebenen schneiden sich in derjenigen Transversalen t, die durch P' hindurchgeht, die Sehne σ_0 schneidet und ausserdem parallel ist zu der schon genannten $\xi\,\eta$-Ebene. Sei R' der Schnittpunkt von t mit σ_0 und seien ausserdem Q_1 und Q_2 die beiden (reellen) Schnittpunkte der Transversalen t mit $\mathfrak{K}$, so wollen wir mit V das Doppelverhältnis



$$V = (P'\, R'\, Q_1\, Q_2) = \frac{P' - Q_1}{P' - Q_2} : \frac{R' - Q_1}{R' - Q_2}$$

bezeichnen. Die gesuchte Entfernung wird dann, abgesehen von einem konstanten Faktor, gleich

$$|\lg V|\,.$$

Dieselbe ist im wesentlichen nur von V abhängig, sie ändert sich daher bei projektiven Umformungen von V nicht.

Sind nun $(\xi\,\eta\,\theta)$ die rechtwinkligen Koordinaten von P', so sind $(0\,0\,\theta)$ diejenigen des Punktes R'; sind also $(a'\, b'\, b_0'\, c')$ die homogenen Koordinaten von P', so folgt aus (2) § 2, dass $(a'\, 0\, 0\, c')$ diejenigen von R' sein müssen.

Die Gleichungen von t lauten daher, unter λ einen Parameter verstanden,

$$\begin{aligned} x\ &= (1+\lambda)\, a' \\ y\ &= \qquad\quad b' \\ y_0 &= \qquad\quad b_0' \\ z\ &= (1+\lambda)\, c'. \end{aligned}$$

Um die Koordinaten von Q_1 und Q_2 zu erhalten oder in letzter Linie das Doppelverhältnis V, setzen wir die Ausdrücke für x usw. ein in die Gleichung der Kugel ((5) § 2) und erhalten

$$(1+\lambda)^2 \cdot a'c' - b'b_0' = 0,$$

woraus

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{\frac{b' b'_0}{a' c'}}$$

folgt. Anderseits wird das Doppelverhältnis

$$V = (P'\, R'\, Q_1\, Q_2) = (0\, \infty\, \lambda_1\, \lambda_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2},$$

so dass, wenn man die Werte für λ_1 und λ_2 oben entnimmt und einsetzt,

$$V = \frac{1 + \sqrt{\frac{b' b'_0}{a' c'}}}{1 - \sqrt{\frac{b' b'_0}{a' c'}}}$$

herauskommt.

Setzen wir für einen Augenblick

$$\sqrt{\frac{b' b'_0}{a' c'}} = \kappa,$$

so genügt κ der Ungleichung

$$0 \leqq \kappa < 1.$$

Denn es ist $(a'\, b'\, b'_0\, c')$ ein Punkt im Innern von $\mathfrak{K}$, seine Koordinaten genügen mithin der Ungleichung $b'\, b'_0 - a'\, c' < 0$, vgl. (6) § 2, woraus die Bedingung für κ als Korollar sich ergibt.

Die Funktion e^z besitzt die Eigenschaft, dass (für reelle Werte von z) immer wenn

$$z' > z \text{ auch } e^{z'} > e^z$$

ist. Daraus folgt nun: Sind κ und κ' die Werte, die $\sqrt{\frac{b' b'_0}{a' c'}}$ annimmt für einen ersten und für einen zweiten Punkt, und soll die Entfernung des zweiten Punktes von σ_0 grösser sein als die des ersten Punktes, dann muss

$$\lg \frac{1 + \kappa'}{1 - \kappa'} > \lg \frac{1 + \kappa}{1 - \kappa}$$

sein, und dieselbe Ungleichung muss auch erfüllt sein, wenn man die linke und die rechte Seite je zum Exponenten von e erhebt. So kommt man auf die Bedingung

$$\frac{1 + \kappa'}{1 - \kappa'} > \frac{1 + \kappa}{1 - \kappa},$$

oder indem man mit den stets positiven Nennern erweitert und zusammenzieht,

$$\kappa' > \kappa.$$

Daraus folgert man: Soll innerhalb eines Systemes von Punkten die Entfernung des Punktes P' von der Sehne σ_0 ein Minimum werden, so muss notwendig κ selber ein Minimum werden, oder aber es muss auch $\kappa^2 - 1$ ein Minimum werden. — In der Tat, ist $\kappa' > \kappa$, so kann nie $\kappa^2 - 1 > \kappa'^2 - 1$ sein, wie man sofort verifiziert, wenn man die Ungleichung p. 10 unten, der sowohl κ als κ' genügen, mit berücksichtigt.

Es ergibt sich mithin der Satz:

> „Soll die Entfernung des Punktes $(a'\, b'\, b'_0\, c')$ von der Sehne $(0, \infty)$ eine kleinste sein, so muss der Quotient $\dfrac{b' b'_0 - a' c'}{a' c'}$ ein Minimum sein.“

§ 5.
Die hyperbolische Entfernung der Sehne $(a'\,b'\,c')$ vom Mittelpunkt M_0 der Kugel $\mathfrak{K}$.

Es seien $a'\,b'\,c'$ die komplexen Koeffizienten der quadratischen Gleichung

$$a'\zeta^2 + 2b'\zeta + c' = 0. \tag{1}$$

Sind dann ζ_1 und ζ_2 die Wurzeln der Gleichung (1), so entsprechen denselben zwei bestimmte Punkte der Kugelfläche $\mathfrak{K}$. Wir denken uns dieselben durch eine Gerade verbunden. Auf diese Weise kann jeder Gleichung (1) eindeutig eine Sehne im Innern von $\mathfrak{K}$ zugeordnet werden. Wir wollen dieselbe durch $(a'\,b'\,c')$ bezeichnen. Ist die Diskriminante $b'^2 - a'c'$ der obigen Gleichung von Null verschieden, so hat die Sehne $(a'\,b'\,c')$ mit dem Innern der Kugel immer Punkte gemein.

Wir suchen nun die Entfernung des Mittelpunktes M_0 der Kugel $\mathfrak{K}$ von der Sehne $(a'\,b'\,c')$. Sie wird auf folgende Weise erhalten. Man denkt sich die Polare p' zu $(a'\,b'\,c')$ konstruiert und bestimmt dann diejenige Transversale t durch M_0, die sich als Schnitt der beiden Ebenen $(M_0, (a'\,b'\,c'))$ und (M_0, p') ergibt. Sei F' der Schnittpunkt von t mit $(a'\,b'\,c')$, und seien Q_1 und Q_2 diejenigen von t mit $\mathfrak{K}$, dann ist, abgesehen von einem unwesentlichen konstanten positiven Faktor, die gesuchte Entfernung gegeben durch

$$|\lg V|\,,$$

wo V das Doppelverhältnis bedeutet

$$V = (F'\,M_0\,Q_1\,Q_2) = \frac{F' - Q_1}{F' - Q_2} : \frac{M_0 - Q_1}{M_0 - Q_2}.$$

Sind $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{b}_0, \mathfrak{c})$ die homogenen Koordinaten eines Punktes der Kugel $\mathfrak{K}$, dann wird die Gleichung der Tangentialebene in diesem Punkte die folgende

$$\mathfrak{c}x - \mathfrak{b}_0 y - \mathfrak{b} y_0 + \mathfrak{a} z = 0.$$

Nun haben die Endpunkte der Sehne $(a'\,b'\,c')$, — das sind die Schnittpunkte derselben mit $\mathfrak{K}$ — die folgenden Koordinaten

$$\zeta_1\zeta_{1_0}, \zeta_1, \zeta_{1_0} \text{ bezw. } \zeta_2\zeta_{2_0}, \zeta_2, \zeta_{2_0}, 1$$

vgl. (3) § 2. Nimmt man (aus (1)) etwa

$$\zeta_1 = \frac{-b' + \sqrt{D}}{a'}, \quad \zeta_2 = \frac{-b' - \sqrt{D}}{a'}, \text{ wo } D = b'^2 - a'c',$$

so werden dieselben Koordinaten ausgedrückt durch a', b', c' und D

$$b'b'_0 + \sqrt{DD_0} - (b'\sqrt{D_0} + b'_0\sqrt{D}), \quad a'_0(\sqrt{D} - b'), \quad a'(\sqrt{D_0} - b'_0), \quad a'a'_0$$

bezw.

$$b'b'_0 + \sqrt{DD_0} + (b'\sqrt{D_0} + b'_0\sqrt{D}), \quad -a'_0(\sqrt{D} + b'), \quad -a'(\sqrt{D_0} + b'_0), \quad a'a'_0.$$

Die Polare p' ist nun bestimmt durch die beiden Gleichungen

$$a'a_0'x - a'(\sqrt{D_0} - b_0')y - a_0(\sqrt{D} - b')y_0 \\ + \left[b'b_0' + \sqrt{DD_0} - (b'\sqrt{D_0} + b_0'\sqrt{D})\right] z = 0$$

$$a'a_0'x + a'(\sqrt{D_0} - b_0')y + a_0'(\sqrt{D} - b')y_0 \\ + \left[b'b_0' + \sqrt{DD_0} + (b'\sqrt{D_0} + b_0'\sqrt{D})\right] z = 0.$$

Bezeichnet man für einen Augenblick die Polynomen der linken Seiten dieser Gleichungen mit t_1 und bezw. t_2 und ist λ ein reeller Parameter, so gibt

$$t_1 - \lambda t_2 = 0$$

eine durch p hindurchgehende Ebene. Wir verfügen nun über λ so, dass dieselbe durch den Punkt M_0 hindurch geht, also für die Koordinaten $(1, 0, 0, 1)$ erfüllt ist. Die bezügliche Bedingung nach λ gelöst ist

$$\lambda = \frac{a'a_0' + b'b_0' + \sqrt{DD_0} - (b'\sqrt{D_0} + b_0'\sqrt{D})}{a'a_0' + b'b_0' + \sqrt{DD_0} + (b'\sqrt{D_0} + b_0'\sqrt{D})}.$$

Setzt man diesen Wert von λ ein in $t_1 - \lambda t_2 = 0$, so wird die Gleichung der Ebene (M_0, p') die:

$$(b'\sqrt{D_0} + b_0'\sqrt{D})x - (a'\sqrt{D_0} - c_0'\sqrt{D})y \\ - (a_0'\sqrt{D} - c'\sqrt{D_0})y_0 - (b'\sqrt{D_0} + b_0'\sqrt{D})z = 0.$$

Ferner sind die Gleichungen der Sehne $(a'\,b'\,c')$ ausgedrückt durch einen Parameter μ die folgenden

$$\begin{aligned} x &= (b'b_0' + \sqrt{DD_0})(1+\mu) - (b'\sqrt{D_0} + b_0'\sqrt{D})(1-\mu) \\ y &= -a_0'b'(1+\mu) + a_0'\sqrt{D}(1-\mu) \\ y_0 &= -a'b_0'(1+\mu) + a'\sqrt{D_0}(1-\mu) \\ z &= a'a_0'(1+\mu). \end{aligned}$$

Indem man diese Ausdrücke einsetzt in die Gleichung der Ebene (M_0, p'), findet man zuerst den Parameter μ aus der Proportion

$$1 + \mu : 1 - \mu = a'a_0' + b'b_0' + \sqrt{DD_0} : b'\sqrt{D_0} + b_0'\sqrt{D},$$

und nachdem man dies oben substituiert, hat man die Koordinaten des Schnittpunktes F' selber; nämlich

$$\begin{aligned} x &= b'b_0' + c'c_0' + \sqrt{DD_0} \\ y &= -(a_0'b' + b_0'c') \\ y_0 &= -(a'b_0' + b'c_0') \\ z &= a'a_0' + b'b_0' + \sqrt{DD_0}. \end{aligned} \tag{2}$$

Nun sind zwei Punkte M_0 und F' von t bekannt, die Gleichungen der Transversalen werden daher

$$\begin{aligned} x &= b'b'_0 + c'c'_0 + \sqrt{DD_0} - \lambda \\ y &= -(a'_0 b' + b'_0 c') \\ y_0 &= -(a'b'_0 + b'c'_0) \\ z &= a'a'_0 + b'b'_0 + \sqrt{DD_0} - \lambda \end{aligned}$$

unter λ ein Parameter verstanden. Um nun Q_1 und Q_2, und schliesslich V zu erhalten, setzen wir diese Ausdrücke ein in die Gleichung $yy_0 - xz = 0$ von $\mathfrak{K}$, und erhalten dann eine quadratische Gleichung für λ. Die ist, nach einfacher Umrechnung des bekannten Gliedes

$$\lambda^2 - \lambda[a'a'_0 + 2b'b'_0 + c'c'_0 + 2\sqrt{DD_0}] + \sqrt{DD_0}[a'a'_0 + 2b'b'_0 + c'c'_0 + 2\sqrt{DD_0}] = 0.$$

Die Diskriminante dieser quadratischen Gleichung ist

$$(a'a'_0 + 2b'b'_0 + c'c'_0 + 2\sqrt{DD_0})(a'a'_0 + 2b'b'_0 + c'c'_0 - 2\sqrt{DD_0}).$$

Seien λ_1 und λ_2 die Wurzeln der obigen Gleichung in λ, so wird endlich

$$V = (0 \infty \lambda_1 \lambda_2) = \tfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

oder also

$$V = \frac{1 + \sqrt{\frac{a'a'_0+2b'b'_0+c'c'_0-2\sqrt{DD_0}}{a'a'_0+2b'b'_0+c'c'_0+2\sqrt{DD_0}}}}{1 - \sqrt{\frac{a'a'_0+2b'b'_0+c'c'_0-2\sqrt{DD_0}}{a'a'_0+2b'b'_0+c'c'_0+2\sqrt{DD_0}}}}$$

Dieselbe Diskussion wie am Schluss des vorangehenden Paragraphen ergibt: es muss

$$\frac{-4\sqrt{DD_0}}{a'a'_0 + 2b'b'_0 + c'c'_0 + 2\sqrt{DD_0}}$$

ein Minimum werden, wenn V ein Minimum werden soll.

Wie man leicht erkennt, ist dies dann der Fall, wenn

$$\frac{a'a_0 + 2b'b'_0 + c'c'_0 + 2\sqrt{DD_0}}{4\sqrt{DD_0}} = \frac{a'a'_0 + 2b'b'_0 + c'c'_0}{4\sqrt{DD_0}} + \frac{1}{2}.$$

ein Minimum wird, woraus sich die Richtigkeit des folgenden Satzes ergibt:

> „Soll die Entfernung der Sehne $(a'\,b'\,c')$ vom Mittelpunkte M_0 eine kleinste sein, so muss der Quotient
>
> $$\frac{a'a'_0 + 2b'b'_0 + c'c'_0}{\sqrt{DD_0}}$$
>
> ein Minimum werden.“

§ 6.
Lineare Transformationen.

In § 2 haben wir erstlich die Ebene der komplexen Zahlen auf die Kugel $\mathfrak{K}$ übertragen und sodann für jeden Punkt des Raumes vier Zahlen $(x,\ y,\ y_0,\ z)$ bestimmt, die wir als homogene Koordinaten desselben ansprechen. Das entsprechende Koordinatentetraeder steht, wie dort schon erwähnt wurde, in enger Beziehung zur Kugel $\mathfrak{K}$.

Es soll nun gezeigt werden, dass jeder linearen Substitution der komplexen Veränderlichen u

$$u' = \frac{\alpha u + \beta}{\gamma u + \delta}, \tag{1}$$

deren Determinante

$$|S| = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$$

ist, und deren Koeffizienten α, β, γ, δ beliebige komplexe Zahlen sind, eine Kollineation des Raumes eindeutig zugeordnet werden kann.

Es sei noch S die Bezeichnung sowohl für das System

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

als auch für die Substitution (1), die wir gelegentlich auch kurz durch

$$u' = S(u) \tag{1'}$$

andeuten werden.

Ist nun

$$S_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix}$$

ein zweites solches System, bezw. eine zweite lineare Transformation, so entsteht durch Kombination von S und S_1 die folgende

$$SS_1(u) = \frac{(\alpha\alpha_1 + \beta\gamma_1)u + (\alpha\beta_1 + \beta\delta_1)}{(\gamma\alpha_1 + \delta\gamma_1)u + (\gamma\beta_1 + \delta\delta_1)}.$$

Sie ergibt sich durch Zusammensetzung der Systeme S und S_1, wie

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\alpha_1 + \beta\gamma_1 & \alpha\beta_1 + \beta\delta_1 \\ \gamma\alpha_1 + \delta\gamma_1 & \gamma\beta_1 + \delta\delta_1 \end{pmatrix}$$

zeigt. Die kombinierte Transformation sei mit SS_1 bezeichnet, es gilt

$$|SS_1| = |S| \cdot |S_1|. \tag{2}$$

Durch die Substitution S wird eindeutig einem Kugelpunkt u ein zweiter Kugelpunkt u' zugeordnet. Sind $(x\,y\,y_0\,z)$ die homogenen Koordinaten von u $(x'\,y'\,y_0'\,z)$ diejenigen von u', so folgt aus (1) oben und aus (3) § 2.

$$\begin{aligned} x' &= \alpha\alpha_0 x + \alpha\beta_0 y + \alpha_0\beta y_0 + \beta\beta_0 z \\ y' &= \alpha\gamma_0 x + \alpha\delta_0 y + \beta\gamma_0 y_0 + \beta\delta_0 z \\ y_0' &= \alpha_0\gamma x + \beta_0\gamma y + \alpha_0\delta y_0 + \beta_0\delta z \\ z' &= \gamma\gamma_0 x + \gamma\delta_0 y + \gamma_0\delta y_0 + \delta\delta_0 z \end{aligned} \tag{3}$$

wobei ein gemeinschaftlicher reeller Faktor von $x' \, y' \, y'_0 \, z$, der unwesentlich ist, unterdrückt wurde.

Das Gleichungssystem (3) stellt eine lineare Transformation der homogenen Koordinaten des Kugelpunktes u dar. Wir wollen dieselbe auch mit S bezeichnen, und es soll etwa das ganze Gleichungssystem (3) kurz

$$(x' \, y' \, y'_0 \, z') = S(x \, y \, y_0 \, z) \tag{3'}$$

geschrieben werden.

Der nämlichen linearen Transformation (3) wollen wir nun auch die Koordinaten eines beliebigen Raumpunktes unterwerfen. Es bedeutet dann (3) eine Kollineation des Raumes, die auch mit S bezeichnet werden soll. Sie führt die Kugel $\mathfrak{K}$ in sich über.

Sei Σ irgend ein System von Punkten, beispielsweise ein geometrisches Gebilde, Σ' das aus Σ durch S hervorgehende, so soll

$$\Sigma' = S(\Sigma)$$

gesetzt werden.

Aus dem Vorangehenden folgt nun, dass es möglich sein wird, die Theorie der linearen Transformationen in Beziehung zu bringen mit denjenigen projektiven Umformungen des Raumes, die eine Kugel in sich transformieren. Die projektiven Invarianten, die wir in den beiden vorigen Paragraphen gewonnen haben, können uns daher bei dieser Theorie erwünschte Dienste leisten.

II. Die Picardsche Gruppe.

§ 7.
Aufstellung der Picardschen Gruppe.

Zu der Picardschen Gruppe sollen alle diejenigen Substitutionen

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \tag{1}$$

gehören, bei welchen $\alpha \, \beta \, \gamma \, \delta$ ganze komplexe Zahlen sind, die noch der Bedingung genügen $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$. Da in S nur das Verhältnis $\alpha : \beta : \gamma : \delta$ wesentlich ist, so kann man sich beschränken auf

$$|S| = \alpha\delta - \beta\gamma = 1. \tag{2}$$

Denn ist $|S| = -1$, so genügt es, $\alpha \, \beta \, \gamma \, \delta$ mit i zu erweitern, um zu erreichen, dass (2) erfüllt ist. Bei gegebener Substitution S sind dann $\alpha \, \beta \, \gamma \, \delta$ bis auf ihr Vorzeichen bestimmt. Die Gesamtheit der Transformationen (1) der Picardschen Gruppe sei abkürzend mit Γ [1]) bezeichnet.

[1]) 1 Vgl. Aut. I, p. 76 u. ff. Die Gruppe, die wir hier Γ bezw. $\bar{\Gamma}$ bezeichnen, ist dort Γ_2 bezw. Γ benannt. Dagegen machen wir hier von denjenigen Gruppen, die dort mit $\bar{\Gamma}$ bezeichnet sind keinen Gebrauch.

Die Diskussion der später folgenden Untersuchungen kann oft dadurch vereinfacht werden, dass man nicht nur die Substitutionen der Gruppe Γ zulässt, sondern dass man zu diesen noch diejenigen hinzunimmt, deren Koeffizienten ganze komplexe Zahlen sind, von der Determinante

$$\alpha\delta - \beta\gamma = i$$

— der Fall $\alpha\delta - \beta\gamma = -i$ ist offenbar darin inbegriffen. — Wir wollen, um uns später leicht orientieren zu können, eine solche Substitution als zur Gruppe $\bar{\Gamma}$ gehörend bezeichnen.

Dass die Substitutionen von Γ sowohl wie die von $\bar{\Gamma}$ eine Gruppe bilden, folgt aus (2) § 6 sofort, und man erkennt auch: es ist die Gruppe Γ eine Untergruppe von $\bar{\Gamma}$.

In der Hauptsache sollen die später folgenden Untersuchungen an die Gruppe Γ geknüpft werden; insbesondere wollen wir die Schlussergebnisse auf sie beziehen. Es möge noch folgende Festsetzung getroffen werden. S soll fernerhin im allgemeinen immer eine Substitution der Gruppe Γ andeuten; doch behalten wir uns vor, damit gelegentlich auch eine Substitution aus $\bar{\Gamma}$ zu bezeichnen, in welchem Falle wir das ausdrücklich erwähnen werden. T dagegen soll eine beliebige ganzzahlige Substitution $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ bedeuten, so dass nur $|T| \neq 0$ ist.

Zunächst wollen wir nun der vorangegangenen Aufstellung der Picardschen Gruppe eine Erörterung folgen lassen, die zum Zwecke hat, jedem Individuum der Gruppe Γ ein solches geometrisches Gebilde eindeutig zuzuordnen, das uns später eine Invariante liefern wird, die in einfacher Weise die Punkte des Diskontinuitätsbereiches der Gruppe Γ charakterisiert.

Ist $u = \frac{p}{q}$ eine rationale komplexe Zahl, so kann man p und q als ganze komplexe Zahlen annehmen, die keinen gemeinschaftlichen Teiler besitzen ausser den Einheitsfaktoren. Man nennt dann $\frac{p}{q}$ einen reduzierten Bruch. Bei einem solchen sind Zähler und Nenner bestimmt bis auf eine Potenz von i, so dass $u = \frac{i^\epsilon \cdot p}{i^\epsilon \cdot q}$ gesetzt werden kann, wo $\epsilon = 0, 1, 2, 3$ zu nehmen ist.

Wir machen für die Zukunft die Voraussetzung, dass wenn von der rationalen Zahl $u = \frac{p}{q}$ die Rede ist, $\frac{p}{q}$ als reduzierter Bruch angenommen ist.

Zwei rationalen Punkten $u = \frac{p}{q}$, $v = \frac{r}{s}$ der Kugel $\mathfrak{K}$ wollen wir die im Innern derselben gelegene Verbindungssehne $\sigma = \left(\frac{p}{q}, \frac{r}{s}\right)$ zuordnen. Der Wert der Determinante $ps - qr$ möge I n v a r i a n t e der Sehne σ heissen. Die Invariante ist, nach einer früheren Bemerkung, bei gegebener Sehne nur bis auf einen der vier Faktoren ± 1, $\pm i$ bestimmt, und sie ändert auch ihr Vorzeichen, wenn die Endpunkte der Sehne mit einander vertauscht werden.

Ist die Invariante einer Sehne σ eine Einheit, also 1, -1, i, oder $-i$, so soll dieselbe E l e m e n t a r s e h n e genannt werden. Aus derselben vorangehenden Bemerkung folgt dann auch, dass man die Parameter u und v einer Elementarsehne σ immer so ansetzen kann, dass die Invariante $ps - qr = 1$ wird; und zwar ist dieser Ansatz immer vierdeutig, wie $u = \frac{i^\epsilon \cdot p}{i^\epsilon \cdot q}$, $v = \frac{i^{-\epsilon} \cdot r}{i^{-\epsilon} \cdot s}$, wo $\epsilon = 0, 1, 2, 3$ ist, lehrt.

Die Sehne $\sigma_0 = \left(\frac{1}{0}, \frac{0}{1}\right) = (\infty, 0)$ ist eine solche Elementarsehne, wir wollen diese Fundamentalsehne heissen.

Sei

$$u' = \frac{\alpha u + \beta}{\gamma u + \delta}$$

eine Substitution S, dann geht durch dieselbe ein rationaler Punkt u der Kugel $\mathfrak{K}$ über in einen andern ebenfalls rationalen Punkt u' von $\mathfrak{K}$; und es geht die Sehne $\left(\frac{p}{q}, \frac{r}{s}\right)$ in eine neue Sehne $\left(\frac{p'}{q'}, \frac{r'}{s'}\right)$ über. Eine einfache Rechnung zeigt, dass

$$p's' - q'r' = (\alpha\delta - \beta\gamma)(ps - qr)$$

wird, woraus folgt

1. Satz: „Geht durch eine Substitution S eine Sehne $\left(\frac{p}{q}, \frac{r}{s}\right)$ in die andere Sehne $\left(\frac{p'}{q'}, \frac{r'}{s'}\right)$ über, so haben die beiden Sehnen dieselbe Invariante. Insbesondere geht daher durch eine Substitution S [1]) eine Elementarsehne immer wieder in eine Elementarsehne über.“

Es sollen nun alle Substitutionen T aufgesucht werden, die eine gegebene Elementarsehne $\sigma = \left(\frac{p}{q}, \frac{r}{s}\right)$ aus der Fundamentalsehne σ_0 entstehen lassen.

Es müssen dieselben der Gleichung

$$\left(\frac{p}{q}, \frac{r}{s}\right) = T(\infty, 0) \text{ oder } = T(0, \infty)$$

genügen. Eine spezielle derartige Substitution ist

$$u' = \frac{pu + r}{qu + s},$$

es ist dies eine S-Substitution, wir wollen sie mit

$$u' = S(u)$$

bezeichnen. Nun muss entweder

$$T(\infty, 0) = S(\infty, 0) \text{ oder } T(0, \infty) = S(\infty, 0)$$

sein. Im ersten Falle wird $(\infty, 0) = S^{-1}T(\infty, 0)$.

Bezeichnet man

$$S^{-1}T = U_1, \text{ also dass } T = SU_1$$

[1]) Der Satz behält seine Richtigkeit, wenn wir S als eine Substitution der Gruppe $\bar{\Gamma}$ ansehen.

wird, so ist U_1 eine Substitution die der Bedingung genügt $U_1(\infty, 0) = (\infty, 0)$, und die daher die Form haben muss

$$u' = \frac{\alpha u}{\delta},$$

wo α und δ beliebige ganze komplexe Zahlen sind, die der Bedingung genügen $\alpha \cdot \delta \neq 0$.

Im zweiten Falle wird $(\infty, 0) = S^{-1}T(0, \infty)$. Bezeichnet man hier

$$S^{-1}T = U_2, \text{ also dass } T = SU_2$$

wird, so ist die Substitution U_2 so beschaffen, dass $U_2(0, \infty) = (\infty, 0)$ ist. U_2 muss daher die Form haben

$$u' = \frac{\beta}{\gamma u}$$

wo auch β und γ beliebige ganze komplexe Zahlen sind, die beide von Null verschieden sein müssen. Es ergibt sich

2. Satz: „Alle Substitutionen T, welche die Sehne σ_0 überführen in die Sehne $\left(\frac{p}{q}, \frac{r}{s}\right)$, ergeben sich durch Zusammensetzung der Substitution $\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$ mit einer beliebigen Substitution U, die eine der beiden typischen Formen

$$u' = \frac{\alpha u}{\delta}, \text{ bezw. } u' = \frac{\beta}{\gamma u}$$

annimmt.“

Greifen wir unter diesen Substitutionen diejenigen heraus, die der Gruppe Γ bezw. $\bar{\Gamma}$ angehören, so muss für diese

$$\begin{aligned} &\text{entweder } \alpha\delta = i \text{ oder } = 1 \\ &\text{bezüglich } \beta\gamma = i \quad „ \quad = 1 \end{aligned}$$

sein. Man erhält daher die folgenden acht Substitutionen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -i \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -i & 0 \end{pmatrix},$$

die der Gruppe $\bar{\Gamma}$ angehören und von denen diejenigen der ersten Zeile in Γ enthalten sind. Sie führen die Fundamentalsehne σ_0 in sich über und es sind das auch die einzigen derartigen Substitutionen der Gruppe $\bar{\Gamma}$ bezw. Γ.

Die vorangehende Diskussion hat auf eine Zuordnung geführt zwischen Elementarsehne σ und Substitution $S = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$. Wir können nämlich S die eindeutig bestimmte Sehne $\left(\frac{p}{q}, \frac{r}{s}\right)$ entsprechen lassen. Man erkennt auch, dass $\frac{p}{q}$ und $\frac{r}{s}$, die die Endpunkte der Elementarsehne ergeben, reduzierte Brüche sind, denn sonst könnte nicht

$ps - qr = 1$ sein. Umgekehrt, ist $\left(\frac{p}{q}, \frac{r}{s}\right)$ irgend eine Elementarsehne, so können wir ihr die folgenden S-Substitutionen zuordnen

$$\begin{pmatrix} i^\epsilon p & i^{-\epsilon} r \\ i^\epsilon q & i^{-\epsilon} s \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -i^\epsilon r & i^{-\epsilon} p \\ -i^\epsilon s & i^{-\epsilon} q \end{pmatrix} \text{ fur } \epsilon = 0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

Da es nur auf das Verhältnis der Koeffizienten ankommt, so erhalten wir daraus nur die folgenden vier verschiedenen Systeme

$$\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -ip & ir \\ -iq & is \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -r & p \\ -s & q \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} ir & ip \\ is & iq \end{pmatrix}.$$

Es ergeben diese gerade diejenigen vier Substitutionen der Gruppe Γ, die σ_0 in $\left(\frac{p}{q}, \frac{r}{s}\right)$ transformieren. Es gilt daher

3. Satz: „Jeder Substitution S ist eindeutig eine Elementarsehne zugeordnet; umgekehrt entsprechen jeder Elementarsehne vier S-Substitutionen."

§ 8.
Die Substitutionen U.

Wie im vorangehenden Paragraphen soll U eine Substitution bedeuten mit ganzzahligen komplexen Koeffizienten, die die Fundamentalsehne σ_0 in sich transformiert.

Unter $(\bar{U})$ fassen wir alle diejenigen Substitutionen U zusammen, deren Determinante $|U| = 1$ oder $= i$ ist. Es ist dies das System der folgenden acht Transformationen

$$\begin{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 0 & -i \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ i & 0 \end{pmatrix}. \end{matrix} \tag{1}$$

Sind U und U' zwei beliebige dieser acht Substitutionen, so ist immer auch die zusammengesetzte UU' in $(\bar{u'})$ enthalten. Denn man kann die allgemeine Substitution (1) auch

$$u' = i^\epsilon u^\delta$$

— wo $\epsilon = 0, 1, 2, 3$; $\delta = 1$ oder $= -1$ zu nehmen sind — schreiben. Ist $U' = i^{\epsilon'} u^{\delta'}$ eine zweite solche Substitution, so wird die zusammengesetzte

$$uu' = i^{\epsilon'} (i^\epsilon u^\delta)^{\delta'} = i^{\epsilon' + \epsilon\delta'} \cdot u^{\delta\delta'},$$

besitzt also denselben Charakter, wie jede der Komponenten, woraus die Richtigkeit der obenstehenden Behauptung folgt.

Die Transformationen (1) bilden daher eine Gruppe, die sich in folgender Weise aufbauen lässt.

$$U_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad U_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

sind zwei spezielle Substitutionen dieser Gruppe von der Eigenschaft, dass die allgemeine

$$U = U_1^r U_2^s, \text{ wo } r = 0,\ 1,\ 2,\ 3;\ s = 0,\ 1 \tag{3}$$

sind, wird. — U_1 und U_2 sind daher die erzeugenden Substitutionen von $(\bar{U})$. In Tabelle (5) ist zu jeder der Transformationen (1) die zugehörige Gestalt (3) angegeben.

Sind $(a\,b\,b_0\,c)$ die homogenen Koordinaten eines Punktes und ist $b = b_1 + ib_2$, so wollen wir in Zukunft, wo es passender ist, auch $(a\,b_1\,b_2\,c)$ als Koordinaten des betreffenden Punktes ansprechen.

Es soll nun weiter untersucht werden, wie sich der Punkt $(a\,b_1\,b_2\,c)$ gegenüber den Transformationen U_1 und U_2 oder also der allgemeinen Transformation U verhält. Aus dem Gleichungssystem (3) § 6, angewendet auf U_1 und U_2 (vgl. (2) oben), folgt:

$$\begin{aligned} U_1(a\,b\,b_0\,c) &= (a,\ ib,\ -ib_0,\ c) \\ U_2(a\,b\,b_0\,c) &= (c,\ b_0,\ b,\ a) \end{aligned} \tag{4'}$$

oder

$$\begin{aligned} U_1(a\,b_1\,b_2\,c) &= (a,\ -b_2,\ b_1,\ c) \\ U_2(a\,b_1\,b_2\,c) &= (c,\ b_1,\ -b_2,\ a), \end{aligned} \tag{4}$$

d. h. die Koordinaten eines Punktes erleiden bei den Substitutionen U_1 und U_2 nur je eine gewisse Vertauschung; bei der allgemeinen Substitution U muss jede dieser Vertauschungen so oft wiederholt werden, als der bezügliche Index r und s angibt.

In der folgenden Tabelle sind die zu der allgemeinen Transformation U gehörenden Koeffizientensysteme notiert, sowie die Vertauschungen, welche die Koordinaten $(a\ b_1\ b_2\ c)$ eines Punktes dabei erleiden.

$$\begin{array}{llll} U_1^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (a\,b_1\,b_2\,c) & U_1^2 \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} (a\,-b_1\,-b_2\,c) \\ U_1 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (a\,-b_2\,b_1\,c) & U_1^3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} (a\,b_2\,-b_1\,c) \\ U_1^0 U_2 \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} (c\,b_1\,-b_2\,a) & U_1^2 U_2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (c\,-b_1\,b_2\,a) \\ U_1 U_2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ i & 0 \end{pmatrix} (c\,b_2\,b_1\,a) & U_1^3 U_2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (c\,-b_2\,-b_1\,a). \end{array} \tag{5}$$

Es sei noch erwähnt, dass wenn wir aus der Gruppe $(\bar{U})$ diejenigen Substitutionen ausschalten, die zu der Determinante $|U| = i$ gehören, wir auf eine Gruppe (U) geführt werden, deren Substitutionen auch in Γ enthalten sind; es sind das die folgenden vier

$$U_1^0, \qquad U_1^2, \qquad U_2, \qquad U_1^2 U_2. \tag{6}$$

Die vier ausgeschalteten Substitutionen

$$U_1, \qquad U_1^3, \qquad U_1 U_2, \qquad U_1^3 U_2 \tag{7}$$

gehen gliedweise aus den vorangehenden hervor durch Anfügung der Substitution U_1.

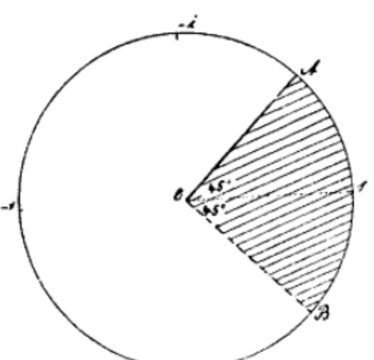
Wie schon gesagt, sind U_1 und U_2 die erzeugenden Substitutionen der Gruppe $(\bar{U})$. Wir bemerken dazu:

U_1 ist nichts anderes als eine Drehung des Raumes um die θ-Achse des ursprünglichen Koordinatensystemes, und zwar eine Drehung um 90°, U_2 dagegen bedeutet eine Umklappung des Raumes um die ξ-Achse um 180°.

Aus diesem Umstand, wie auch aus Tabelle (5) erkennt man die Richtigkeit der folgenden Bemerkung.

1. Bemerkung. Von den acht verschiedenen Punkten, die einander aequivalent sind durch die Substitutionen der Gruppe $(\bar{U})$, genügen die Koordinaten eines und nur eines den Ungleichungen

$$a \geqq c\,[1]); \quad b_1 > b_2; \quad b_1 \geqq -b_2. \tag{8}$$



Die nebenstehende Figur veranschaulicht den Bereich, dem die betreffenden Punkte angehören. Man denkt sich den Punkt ∞ der Kugel $\mathfrak{K}$ verbunden durch Ebenen mit den Radien $O\,A$ und $O\,B$. Die obere Hälfte des keilförmigen Kugelausschnittes, der zum Sektor $A\,O\,B$ gehört, mit Einschluss der Punkte der Ebenen $(O\,A\,B)$ und $(\infty\,O\,A)$ und Ausschluss derjenigen der Ebene $(\infty\,O\,B)$ gehört dem durch die Ungleichungen (8) charakterisierten Bereiche an.

Wie schon gesagt, gehören von den acht Substitutionen der Gruppe $(\bar{U})$ vier der Gruppe Γ an, es sind das die vier in der Gruppe (U) enthaltenen (vgl. (6) oben). Es gibt daher zu einem Punkte $(a\,b_1\,b_2\,c)$ vier Punkte, die jenem aequivalent sind durch eine Substitution U, die in Γ enthalten ist. Entnimmt man aus (6) die bezüglichen Substitutionen und geht in Tabelle (5) über, so erkennt man die Richtigkeit der folgenden Bemerkung.

2. Bemerkung. Von den vier verschiedenen Punkten, die einander aequivalent sind durch die Substitutionen der Gruppe (U), genügen die Koordinaten eines und nur eines den Relationen

$$a \geqq c; \quad b_1 \geqq 0 \tag{9}$$

wo, wenn die Gleichheitszeichen eintreten, noch $b_2 \geqq 0$ vorausgesetzt werden kann.

Der hierdurch charakterisierte Bereich ist im wesentlichen nichts anderes als derjenige Kugelquadrant, der von den Halbebenen herausgeschnitten wird, $\xi = 0$ und $\theta = 0$, und zwar von denjenigen Hälften, wo bezw. $\theta \geqq 0$ und $\xi \geqq 0$ ist.

§ 9.
Minimum der Entfernung des Punktes $(a\,b\,b_0\,c)$ von der Fundamentalsehne σ_0.

Wir suchen in diesem Paragraphen eine möglichst einfache Ungleichung herzuleiten, die ausdrückt, dass der Punkt $(a\,b\,b_0\,c)$, der im Innern der Kugel $\mathfrak{K}$ liegen soll, von der Fundamentalsehne σ_0 eine kleinere oder doch nicht grössere Entfernung hat als von jeder andern Elementarsehne $\sigma = \left(\dfrac{\alpha}{\gamma}, \dfrac{\beta}{\sigma}\right)$.

---

[1]) Ist in (8) $a = c$, so muss der Eindeutigkeit wegen noch etwa $b_2 \leqq 0$ vorausgesetzt werden.

Bezeichnen wir mit S die Substitution, deren Schema $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ ist, so wird dasjenige der dazu inversen Substitution

$$S^{-1} = \begin{pmatrix}-\delta & \beta \\ \gamma & -\alpha\end{pmatrix}. \tag{1}$$

Sei $(a'\,b'\,b'_0\,c')$ derjenige Punkt, der aus $(a\,b\,b_0\,c)$ durch die Substitution S^{-1} hervorgeht, so berechnet man an Hand von (3) § 6.

$$\begin{aligned}
a' &= \ \ a\cdot\delta\delta_0 - b\cdot\beta_0\delta\ - b_0\cdot\beta\delta_0 + c\cdot\beta\beta_0\\
b' &= -a\cdot\gamma_0\delta + b\cdot\alpha_0\delta + b_0\cdot\beta\gamma_0 - c\cdot\alpha_0\beta\\
b'_0 &= -a\cdot\gamma\delta_0 + b\cdot\beta_0\gamma + b_0\cdot\alpha\delta_0 - c\cdot\alpha\beta_0\\
c' &= \ \ a\cdot\gamma\gamma_0 - b\cdot\alpha_0\gamma - b_0\cdot\alpha\gamma_0 + c\cdot\alpha\alpha_0,
\end{aligned} \tag{2}$$

und daraus noch

$$b'b'_0 - a'c' = (bb_0 - ac)(\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha_0\beta_0 - \beta_0\gamma_0). \tag{3}$$

Nun geht durch dieselbe Substitution S^{-1} die Sehne σ über in die Fundamentalsehne σ_0. Aus dem Satz am Schluss von § 4 entnimmt man: Soll die Entfernung des Punktes $(a'\,b'\,b'_0\,c')$ von σ_0 eine möglichst kleine werden, so muss $\dfrac{b'b'_0 - a'c'}{a'\cdot c'}$ ein Minimum werden. Soll daher die Entfernung des Punktes $(a\,b\,b_0\,c)$ von der Sehne $\left(\dfrac{\alpha}{\gamma}, \dfrac{\beta}{\delta}\right)$ kleiner oder doch nicht grösser sein als von jeder andern Elementarsehne, so muss für die betreffenden Werte von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ der Quotient

$$\frac{(bb_0 - ac)(\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha_0\delta_0 - \beta_0\gamma_0)}{(a\delta\delta_0 - b\beta_0\delta - b_0\beta\delta_0 + c\beta\beta_0)(a\gamma\gamma_0 - b\alpha_0\gamma - b_0\alpha\gamma_0 + c\alpha\alpha_0)}$$

ein Minimum werden (vgl. (2) und (3) oben).

Der Zähler desselben ist, da es sich nur um Elementarsehnen handelt, eine negative konstante Zahl. Man erkennt daher die Richtigkeit des

1. Satzes: „Soll die Entfernung des Punktes $(a\,b\,b_0\,c)$ von der Elementarsehne $\left(\dfrac{\alpha}{\gamma}, \dfrac{\beta}{\delta}\right)$ kleiner oder höchstens gleich sein der Entfernung desselben Punktes von jeder andern Elementarsehne, so muss für die betreffenden Werte von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ das Produkt

$$(a\gamma\gamma_0 - b\alpha_0\gamma - b_0\alpha\gamma_0 + c\alpha\alpha_0)(a\delta\delta_0 - b\beta_0\delta - b_0\beta\delta_0 + c\beta\beta_0) \tag{4}$$

ein Minimum werden.“

Der Hülfssatz in § 3 wird uns nun den Beweis des folgenden weitern Satzes liefern.

2. Satz: „Ist P ein Punkt im Innern der Kugel $\mathfrak{K}$, so gibt es immer nur endlich viele Elementarsehnen, von denen er eine Entfernung hat, die kleiner ist als eine gegebene positive Grösse M.“

Soll nämlich die Entfernung des Punktes P, dessen Koordinaten $(a\,b\,b_0\,c)$ sein sollen, von der Sehne $\sigma = \left(\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\gamma}\right)$ unterhalb M liegen, so muss das Produkt $a' \cdot c'$ (vgl. (2) und (4) oben) unter einer positiven endlichen Zahl liegen. In der Tat, würde $a' \cdot c'$ über jede endliche Grösse hinauswachsen können, so könnte

$$\varrho^2 = \frac{(bb_0 - ac)(\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha_0\delta_0 - \beta_0\gamma_0)}{a' \cdot c'} + 1$$

und mit ihm ϱ beliebig nahe an 1 heran rücken, und infolgedessen könnte auch lg $\frac{1+\varrho}{1-\varrho}$, d. i. die Entfernung (P, σ), beliebig gross werden, was auf einen Widerspruch führt mit der Voraussetzung.

Aus (2) ersieht man, dass a' und c' homogene reelle Funktionen zweiten Grades sind bezüglich der Komponenten von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Sehen wir nun diese Komponenten als Veränderliche an, so können wir Gebrauch machen von dem Satz in § 3. Laut Bemerkung 3 in § 2 sind a' und c' immer > 0, so lange nicht alle der Veränderlichen zugleich verschwinden. Da das nicht sein kann, indem ja die Invariante $\alpha\delta - \beta\gamma$ jeder Elementarsehne $= 1$ genommen werden kann, so besitzen a' und c', von denen die erste nur von β und δ, die andere nur von α und γ abhängig ist, gewisse Minima m_1 und m_2 die beide > 0 sind. Es muss daher für die in Betracht kommenden Sehnen

$$a' < \frac{M'}{m_2} \text{ und } c' < \frac{M'}{m_1}$$

sein. Die rechten Seiten dieser Ungleichungen sind endliche Zahlen, es kann daher auch nur eine endliche Anzahl von Wertepaaren β, δ und α, γ geben, die den obigen Ungleichungen genügen und daher endlich auch nur endlich viele Elementarsehnen, w. z. b. w.

Es folgt nun weiter

3. Satz: „Ist P ein Punkt im Innern der Kugel $\mathfrak{K}$, so hat er von einer oder von mehreren, stets aber nur von einer endlichen Anzahl von Elementarsehnen eine kleinste Entfernung.“

Denn bezeichnet M eine Grösse, die (um beliebig wenig) grösser ist, als die Entfernung einer bestimmten Elementarsehne σ von P, dann gibt es nach Satz 2 nur endlich viele Elementarsehnen, deren Abstand von P kleiner ist als M, in dieser Anzahl sind dann offenbar auch alle diejenigen enthalten, die von P eine kleinste Entfernung besitzen.

Zunächst ist nun für die Fundamentalsehne $\sigma \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, die Entfernung des Punktes $(a\,b\,b_0\,c)$ von σ_0 ist daher im wesentlichen bestimmt durch das Produkt $a \cdot c$, (vgl. Satz 1 oben). Soll nun der Abstand des Punktes $P(a\,b\,b_0\,c)$ von der Fundamentalsehne σ_0 nicht grösser sein als von jeder andern Elementarsehne, so muss für jedes Wertesystem $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, das von $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ verschieden ist, die Ungleichung erfüllt sein

$$(a\delta\delta_0 - b\beta_0\delta - b_0\beta\delta_0 + c\beta\beta_0)(a\gamma\gamma_0 - b\alpha_0\gamma - b_0\alpha\gamma_0 + c\alpha\alpha_0) \geqq a \cdot c, \tag{5}$$

wo das Gleichheitszeichen nur dann gilt, wenn der Punkt P von σ genau gleich weit entfernt ist, wie von σ_0.

Bekanntlich führen die Substitutionen der Gruppe $(\bar{U})$ die Fundamentalsehne σ_0 in sich über, sowie auch die Gesamtheit der Elementarsehnen (vgl. Satz 1 § 7), es besitzen daher je solche acht Punkte, die einander aequivalent sind, durch die Substitutionen dieser Gruppe, von der Sehne σ_0 alle dieselbe Entfernung. In der vorstehenden Untersuchung kann daher jederzeit jeder der acht Punkte durch einen beliebigen der sieben andern ersetzt werden; so könnten wir uns ein für allemal etwa auf denjenigen Punkt beschränken, welcher durch die 1. Bemerkung am Schluss von § 8 charakterisiert ist, doch ist es nicht notwendig sich so einzuschränken, es genügt an der ersten der Ungleichungen (8) § 8 allein fest zu halten, d. h. sich auf diejenigen Punkte zu beschränken, deren Koordinaten der Bedingung

$$a \geqq c \tag{6}$$

genügen.

Es soll nun gezeigt werden, dass die Bedingung (5) durch die folgende gleichwertige ersetzt werden kann

$$a\mu\mu_0 - b\lambda_0\mu - b_0\lambda\mu_0 + c\lambda\lambda_0 \geqq a, \tag{7}$$

zu der wir noch die folgende ergänzende Bemerkung hinzufügen müssen.

1. Bemerkung.

a) Die Relation (7) tritt nur dann an Stelle von (5), wenn auch die Bedingung (6) erfüllt ist.

b) λ und μ bedeuten zwei beliebige ganze komplexe Zahlen, die jedoch keinen gemeinschaftlichen Teiler haben dürfen und von denen die zweite μ nicht gleich Null sein darf.

Da $\frac{\lambda}{\mu}$ Endpunkt einer Elementarsehne ist, (vgl. die einzelnen Faktoren in (5)) so sagt (7) aus: im allgemeinen muss für jeden Endpunkt $\frac{\lambda}{\mu}$ einer Elementarsehne σ die von σ_0 verschieden ist, der Ausdruck $\bar{a}(\lambda\,\mu)$ (vgl. die linke Seite von (7)) grösser oder mindestens gleich sein a. Eine Ausnahme hiervon machen nur diejenigen Elementarsehnen, die durch den Punkt $\left(\frac{1}{0}\right)$ hindurch gehen; für diesen einen Endpunkt derselben wird $\bar{a}(1,0) = c \leqq a$.

Indem man (7) mit (5) vergleicht, erkennt man, dass (7) mit der hinzugefügten Bemerkung hinreichend ist dafür, dass für jede Elementarsehne σ auch (5) erfüllt ist. Es soll nun gezeigt werden, dass die eben genannte Bedingung nicht nur eine hinreichende, sondern auch eine notwendige ist.

Zu dem Ende zeigen wir, dass, wenn es ein Zahlenpaar $\lambda\,\mu$ geben sollte, für welches $\bar{a}(\lambda\,\mu) < a$ ist, dass es dann auch eine Elementarsehne σ geben würde, für welche $a'\,c' < a\,c$ wird, während wir voraussetzen, dass für jedes System $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ das von $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ verschieden ist, $a'\,c' \geqq a\,c$ sein soll.

Zunächst werden wir nachweisen, dass, wenn es ein beliebiges Zahlenpaar (λ, μ) gibt, für welches $\bar{a}(\lambda\,\mu) < a$, dass dann diese Ungleichung auch erfüllt ist für ein Paar $(\lambda', 1)$. Ist das richtig, so wird für die Elementarsehne $\left(\frac{1}{0}, \frac{\lambda'}{1}\right)$ der eine der beiden Faktoren

a' und c' gleich c, der andere $\bar{a}(\lambda', 1)$ wird nach Voraussetzung $< a$ und daher wird für diese Sehne $a'c' < ac$ was auf den gewünschten Widerspruch führt.

$|b_1|$ und $|b_2|$ mögen die absoluten Beträge von b_1 und b_2 bezeichnen, so dass also $b = \epsilon|b_1| + i\eta|b_2|$ gesetzt werden kann, wo ϵ und $\eta = \pm 1$ sind. In dem Ausdruck $\bar{a}(\lambda\,\mu)$ wollen wir

$$a = A + |b_1| + |b_2| \text{ und } c = C + |b_1| + |b_2|$$

setzen, aus (6) folgt dann

$$A \geqq C \tag{6'}$$

und es wird

$$\bar{a}(\lambda\,\mu) = A\mu\mu_0 + C\lambda\lambda_0 + |b_1|(\mu - \epsilon\lambda)(\mu_0 - \epsilon\lambda_0) + |b_2|(\mu + i\eta\lambda)(\mu_0 - i\eta\lambda_0).$$

Wir bemerken dazu, λ und μ sind zwei ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Teiler, es lassen sich daher immer zwei andere ganze Zahlen λ' und μ' finden, so dass $\lambda\lambda' - \mu\mu' = 1$ wird, und hieraus gewinnt man die

2. Bemerkung.

a) Ist $\lambda = 0$, so wird $\mu = 1$.

b) Ist $\mu - \epsilon\lambda = 0$, so werden λ und μ Einheiten und zwar derart, dass $(\mu + i\eta\lambda)(\mu_0 - i\eta\lambda_0) = 2$ wird.

c) Ist $\mu + i\eta\lambda = 0$, so werden wieder λ und μ Einheiten von der Art, dass $(\mu - \epsilon\lambda)(\mu_0 - \epsilon\lambda_0) = 2$ wird.

Im Falle $\lambda = 0$, wird daher $\bar{a}(0, 1) = a$, es ist dann (7) gerade noch erfüllt. Soll nun

$$A\mu\mu_0 + C\lambda\lambda_0 + |b_1|(\mu - \epsilon\lambda)(\mu_0 - \epsilon\lambda_0) + |b_2|(\mu + i\eta\lambda)(\mu_0 - i\eta\lambda_0) < A + |b_1| + |b_2|$$

sein, wo wir den vorangehenden Erörterungen zufolge $|\lambda| > 0$, $|\mu| > 1$ anzunehmen haben, so sehen wir, die Ungleichung kann nur erfüllt sein, wenn $C < 0$ ist. Ist aber das der Fall, so ist dieselbe auch erfüllt für ein Zahlenpaar $(\lambda', 1)$. Ist nämlich $|b_1| > |b_2|$, so wählen wir λ' so, dass $1 - \epsilon\lambda' = 0$ wird. Dann ist nach Bemerkung 2b) $(1 + i\eta\lambda')(1 - i\eta\lambda') = 2$ und also wird $\bar{a}(\lambda', 1) = A + C + 2|b_2| < A + |b_1| + |b_2|$. Ist umgekehrt $|b_1| < |b_2|$, so ergibt sich eine ganz analoge Diskussion, die wie die vorangehende auf den gewünschten Widerspruch führt.

Die Annahme, dass für ein Zahlenpaar $(\lambda\,\mu)$ wo $|\mu| > 0$, $\bar{a}(\lambda\,\mu) < a$ werde, tritt also immer in Opposition mit der Voraussetzung, dass für alle Elementarsehnen σ die von σ_0 verschieden sind $a'c' \geqq ac$ erfüllt sei. Es ergibt sich

4. Satz: „Ist $(a\,b\,b_0\,c)$ ein innerer Punkt der Kugel $\mathfrak{K}$ und soll derselbe von der Sehne σ_0 eine kleinere oder doch nicht grössere Entfernung haben, als von jeder andern Elementarsehne, so müssen seine Koordinaten der Bedingung (7) genügen, unter Berücksichtigung der Bemerkung 1.“

§ 10.
Der Diskontinuitätsbereich der Picardschen Gruppe.

Wir wollen in diesem Paragraphen die Gesamtheit derjenigen Punkte betrachten, die von der Fundamentalsehne σ_0 näher oder doch nicht weiter entfernt liegen als von jeder andern Elementarsehne. Wir werden sodann zeigen, dass dieses Gebiet einen Diskontinuitätsbereich der Picardschen Gruppe bildet.

Ausgehend von Satz 4 des vorangehenden Paragraphen, findet man nun, dass die Ungleichung (7) § 9 für jedes in Betracht kommende Zahlenpaar λ, μ erfüllt ist, wenn sie für die folgenden vier Paare

$$1, 1; \quad i, 1; \quad -1, 1; \quad -i, 1$$

befriedigt ist. Indem man dieselben nacheinander in die schon erwähnte Ungleichung einsetzt, kommt man auf die folgenden vier Bedingungen, denen die Koordinaten $(a\, b\, b_0\, c)$ bezw. $(a\, b_1\, b_2\, c)$ zu genügen haben

$$\begin{aligned} a- b- b_0 + c &\geqq a \text{ oder } c - 2b_1 \geqq 0 \\ a+ib-ib_0 + c &\geqq a \quad „ \quad c - 2b_2 \geqq 0 \\ a+ b+ b_0 + c &\geqq a \quad „ \quad c + 2b_1 \geqq 0 \\ a-ib+ib_0 + c &\geqq a \quad „ \quad c + 2b_2 \geqq 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Nehmen wir noch die Bedingung (6) § 9 hinzu, so sehen wir $(a\, b_1\, b_2\, c)$ müssen insgesamt den folgenden Relationen genügen

$$a \geqq c; \quad c \geqq \pm 2b_1; \quad c \geqq \pm 2b_2, \tag{B$_\text{a}$}$$

damit der betreffende Punkt die gewünschte Lage hat. Setzt man

$$b = \epsilon|b_1| + i\eta|b_2|; \quad a = A + |b_1| + |b_2|; \quad c = C + |b_1| + |b_2|, \tag{2}$$

wo $|b_1|$ und $|b_2|$ die absoluten Beträge von b_1 und b_2 bedeuten, ϵ und η also $= \pm 1$ zu nehmen sind, so folgt aus (B_a), dass

$$A \geqq C \geqq 0 \tag{3}$$

ist. Substituiert man (2) in (7) § 9, so kommt man auf

$$\begin{aligned} \bar{a}(\lambda\, \mu) = A\mu\mu_0 + C\lambda\lambda_0 + |b_1|(\mu - \epsilon\lambda)(\mu_0 - \epsilon\lambda_0)& \\ + |b_2|(\mu + i\eta\lambda)(\mu_0 - i\eta\lambda_0) &\geqq A + |b_1| + b_2 \end{aligned} \tag{4}$$

Wie man sofort erkennt, ist diese Bedingung immer erfüllt, wenn die Koeffizienten

$$\mu; \ \lambda\,^{1)}; \ \mu - \epsilon\lambda; \ \mu + i\eta\lambda \mathrel{\mp\!\!\!\!=} 0, 0, 0, 0$$

sind. Der erste derselben ist nach Voraussetzung von Null verschieden, es können also nur

$$\lambda, \ \mu - \epsilon\lambda, \ \mu + i\eta\lambda$$

verschwinden. Zwei derselben können nicht gleichzeitig verschwinden, denn, wie man sieht, würde sonst $\lambda = \mu = 0$ werden. Es bleiben daher nur die Möglichkeiten übrig

[1]) Von dem Falle $\lambda = 0$ kann man ursprünglich absehen.

a) $\lambda = 0$, dann wird $\mu = 1$ (Bemerkung 2, a, § 9), also $\bar{a} = A + |b_1| + |b_2| = a$.

b) $\mu - \epsilon\lambda = 0$, dann wird $|\mu| = |\lambda| = 1$ und ferner $(\mu + i\eta\lambda)(\mu_0 - i\eta\lambda) = 2$ (Bemerkung 2, b § 9), also dass $\bar{a} = A + C + 2|b_2| = a + c - 2|b_1| \geqq a$ herauskommt (vgl. ($\mathrm{B_a}$)).

c) $\mu + i\eta\lambda = 0$, dann wird wieder $|\mu| = |\lambda| = 1$ und $(\mu - \epsilon\lambda)(\mu_0 - \epsilon\lambda_0) = 2$ (Bemerkung 2, c, § 9) und somit $\bar{a} = A + C + 2|b_1| = a + c - 2|b_2| \geqq a$, (vgl. ($\mathrm{B_a}$)).

Daraus folgt, die Ungleichung (4) ist für jedes in Betracht kommende Zahlenpaar $\lambda\,\mu$, oder also für jede von σ_0 verschiedene Elementarsehne σ erfüllt, wenn die Koordinaten $(a\,b_1\,b_2\,c)$ des betreffenden Punktes den Bedingungen ($\mathrm{B_a}$) genügen. Des fernern übersieht man, so lange in den Bedingungen ($\mathrm{B_a}$) die Gleichheitszeichen an irgend einer Stelle ausgeschlossen werden, solange ist auch immer $a' \cdot c' > a \cdot c$, d. h. ist die Entfernung des Punktes $(a\,b_1\,b_2\,c)$ von der Sehne σ grösser als von der Sehne σ_0. Man erkennt so die Richtigkeit des folgenden Satzes.

1. Satz: „Sind $(a\,b_1\,b_2\,c)$ die Koordinaten eines Punktes P, und genügen dieselben den Bedingungen ($\mathrm{B_a}$), so dass an keiner Stelle, ausgenommen etwa bei $a \geqq c$, das Gleichheitszeichen eintritt, so hat P von der Sehne σ_0 eine kleinere Entfernung als von jeder andern Elementarsehne σ. — Tritt dagegen an irgend einer der (in Betracht kommenden) Stellen statt des $>$-Zeichens das $=$-Zeichen ein, so hat zwar P von σ_0 immer noch eine kleinste Entfernung, aber es gibt dann, und nur dann, noch eine oder mehrere andere Elementarsehnen, von denen der Punkt P dieselbe Entfernung hat wie von σ_0."

Die Gesamtheit der Punkte $(a\,b_1\,b_2\,c)$, die durch die Bedingungen ($\mathrm{B_a}$) charakterisiert ist, ist die folgende. Sie ist begrenzt von den fünf Ebenen, deren Gleichungen sind:

$$a = c;\ c = 2b_1;\ c = -2b_1;\ c = 2b_2;\ c = -2b_2.$$

Die Punkte im Innern und auf der Begrenzung des dadurch bestimmten Fünfflachs gehören dem durch ($\mathrm{B_a}$) charakterisierten Bereiche an.

Nimmt man noch Bemerkung 2, § 8 zu Hülfe, so erkennt man, dass der durch ($\mathrm{B_a}$) definierte Bereich noch in folgender Weise eingeschränkt werden kann. Indem man nämlich nur diejenigen Punkte jener Gesamtheit zusammenfasst, die $b_1 \geqq 0$ genügen, wird dieselbe gerade halbiert. Wir kommen so auf ein neues Pentaeder P_0, das wir folgendermassen genauer umgrenzen wollen.

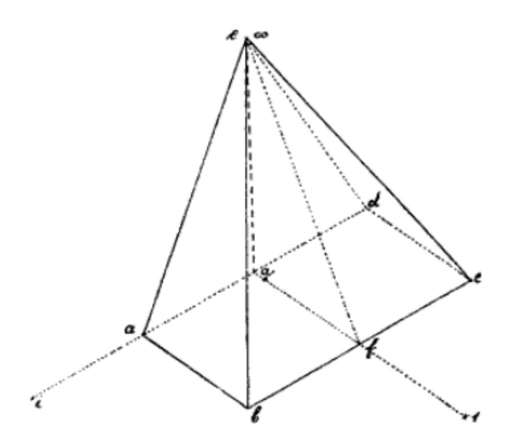
Definition. Zum Pentaeder P_0 sollen alle diejenigen Punkte $(a\,b_1\,b_2\,c)$ gehören, deren Koordinaten den folgenden Relationen genügen

$$a \geqq c,\ b_1 \geqq 0,\ c - 2b_1 \geqq 0,\ c - 2b_2 \geqq 0,\ c + 2b_2 > 0, \qquad \text{(B)}$$

wo, wenn an irgend einer Stelle das Gleichheitszeichen vorkommt, noch $b_2 \geqq 0$ vorausgesetzt werden soll.

Die nebenstehende Figur stellt diesen Bereich dar. Von der Begrenzung des Pentaeders $(a\,b\,c\,d\,e)$ haben wir diejenigen Punkte mitzunehmen, die den Dreiecken $(a\,b\,e)$, $(a\,e\,g)$, $(b\,e\,f)$ und bezw. dem Viereck $(a\,b\,f\,g)$ angehören.

Durch die Substitutionen der Gruppe (U) ((6) § 8) geht das Pentaeder P_0 über in vier zu ihm aequivalente Räume, die zusammen ein Oktaeder einfach und lückenlos ausfüllen. Wir wollen dasselbe T_0' bezeichnen. Es gilt dann der



2. Satz: „Ist Q ein Punkt der T_0' angehört, so gibt es immer einen und auch nur einen Punkt Q_0, der dem Pentaeder P_0 angehört und der durch eine Substitution der Gruppe (U) aus Q hervorgeht."

Damit ein Punkt Q dem Oktaeder T_0' angehört, müssen seine Koordinaten $(a\, b_1\, b_2\, c)$, wie sich beim Übergang von P_0 auf T_0' (an Hand von (6) und Tabelle (5) § 8) ergibt, den folgenden Bedingungen genügen

$$\begin{aligned} a \geqq 2|b_1|, \quad c \geqq 2|b_1| \\ a \geqq 2|b_2|, \quad c \geqq 2|b_2|. \end{aligned} \tag{B$'$}$$

Wir bemerken, dass die Bedingungen (B′) sich nicht vollkommen decken mit denjenigen, die für T_0 gelten, indem an einzelnen Stellen die Gleichheitszeichen nur unter gewissen Einschränkungen gelten.

Nur bei Anlass der Diskussion des Diskontinuitätsbereiches der Gruppe Γ werden wir nochmals auf T_0' zu sprechen kommen, sonst aber wollen wir als Fundamentaloktaeder T_0 das durch die Relationen (B′) charakterisierte bezeichnen. Die Fundamentalsehne σ_0 nennen wir Hauptdiagonale von T_0.

Wie man sieht, decken sich die Relationen (B′) und (B_a), so dass wenn die Koordinaten eines Punktes den letzteren Bedingungen genügen, sie dann auch die ersteren befriedigen. Umgekehrt, sind die Ungleichungen (B′) erfüllt, so sind, je nachdem $a \geqq c$ oder $a < c$ ist, auch die Bedingungen (B_a) erfüllt bezw. nicht erfüllt. Ist dieses letztere der Fall, so genügt es, den vorliegenden Punkt der Transformation U_2 zu unterwerfen, die bekanntlich die Entfernung des Punktes von der Sehne σ_0 nicht ändert, um dann auf einen Punkt zu kommen, dessen Koordinaten den Ungleichungen (B_a) Genüge leisten. Man kann daher Satz 1 die folgende neue Fassung geben:

3. Satz: „Liegt ein Punkt P im Innern des Fundamentaloktaeders T_0, so hat er von jeder andern Elementarsehne σ eine grössere Entfernung wie von σ_0. — Liegt er auf der Begrenzung von T_0, so hat er von σ_0 immer noch eine kleinste Entfernung, aber es gibt dann noch andere Elementarsehnen, von denen er eine gleich kleine Entfernung hat."

Jede Substitution, die T_0 in sich transformieren soll, muss auch σ_0 in sich überführen, es folgt daher

4. Satz: „Die Substitutionen der Gruppe (U) sind die einzigen in Γ enthaltenen, die T_0 in sich überführen."

Ferner gilt

5. Satz: „Jeder Elementarsehne $\sigma = \left(\frac{\alpha}{\beta}, \ \frac{\gamma}{\delta}\right)$ gehört ein bestimmtes Oktaeder T an, das aus T_0 durch die Transformation $S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ hervorgeht — bezw. durch die Transformationen SU, wo U aus der Gruppe (U) entnommen wird. — σ ist Hauptdiagonale von T und die Punkte im Innern und auf der Begrenzung von T besitzen von jeder andern Elementarsehne eine grössere oder doch nicht kleinere Entfernung wie von σ.“

6. Satz: „Die Gesamtheit der Oktaeder T erfüllt das Innere von $\mathfrak{K}$ einfach (abgesehen von den Begrenzungen von T) und lückenlos.“

Denn ist P ein Punkt im Innern der Kugel, so hat er gemäss Satz 3, § 9 von einer oder von mehreren Elementarsehnen eine kleinste Entfernung; er muss daher im Innern oder auf der Begrenzung wenigstens eines Oktaeders T liegen. Und er kann auch nicht zugleich dem Innern von zwei oder mehreren Oktaedern angehören, es müsste denn auch solche Punkte im Innern von T_0 geben, was nicht der Fall ist.

7. Satz: „Ist Q ein Punkt im Innern der Kugel, so gibt es wenigstens einen Punkt Q_0, der dem Oktaeder T_0 angehört und welcher Q aequivalent ist bezüglich der Gruppe Γ.“

Es ist dies eine unmittelbare Folge von Satz 6. Ist nun P ein beliebiger Punkt von T_0, so gehört derselbe entweder bereits auch dem Oktaeder T_0' an, oder aber er gehört ihm noch nicht an.

Betrachten wir den letzteren Fall; der Punkt P liegt dann auf einem gewissen Stück der Begrenzung von T_0.

Sieht man genau zu, welches die Begrenzung von T_0' ist, und beachtet man, dass die Transformationen

$$\begin{pmatrix} 1 & \epsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \epsilon & 1 \end{pmatrix} \text{ für } \epsilon = 1, -1, i, -i, \tag{5}$$

wie übrigens auch für jeden ganzzahligen Wert von ϵ, der Gruppe Γ angehören, so findet man, dass durch je eine der acht Transformationen (5) der betrachtete Punkt P in einen neuen Punkt P' übergeführt wird, der nicht nur T_0, sondern auch T_0' angehört. — Andererseits, fasst man die Begrenzung von T_0' ins Auge, sowie die Begrenzungen derjenigen acht Gebiete T', in welche T_0' durch die Substitutionen (5) übergeführt wird, sofern diese Gebiete überhaupt eine feste Begrenzung besitzen, so erkennt man, dass die betreffenden Ebenenstücke die Begrenzung von T_0 einfach und lückenlos überdecken.

Aus Satz 2 und 7 als Korollar ergibt sich

8. Satz: „Ist Q ein beliebiger Punkt im Innern der Kugel, so gibt es immer einen und auch nur einen Punkt Q_0, der dem Pentaeder P_0 angehört und der Q aequivalent ist durch eine Substitution der Gruppe Γ.“

In der Tat kann es auch nicht zwei solche Punkte geben, etwa Q_0 und Q_0', sonst müssten sie einander aequivalent sein bezüglich einer Substitution S, die nicht in (U) enthalten ist (vgl. Satz 2). Durch dieselbe ist ein zu T_0' aequivalenter Bereich T' bestimmt. Die Punkte Q_0 und Q_0' müssten daher auf der gemeinschaftlichen Begrenzung

von P_0 und T' liegen, eine solche gibt es aber nach einer vorangehenden Bemerkung gar nicht.

Man kann daher das Pentaeder P_0 als Diskontinuitätsbereich im engeren Sinne der Picardschen Gruppe Γ ansprechen. Im Hinblick darauf, dass das Fundamentaloktaeder T_0 im wesentlichen ein Multiplum von P_0 ist, und insbesondere mit Rücksicht auf Satz 3, welcher allen Punkten von T_0 dieselbe Invarianteneigenschaft beilegt, wollen wir in erweitertem Sinne T_0 als Diskontinuitätsbereich der Gruppe Γ bezeichnen.

Um die durch die Oktaeder T vermittelte Einteilung des Kugelinnern noch etwas besser zu durchschauen, möge der folgende Satz beigefügt werden.

9. Satz: „An jede Seitenfläche von T_0 legt sich ein und nur ein Oktaeder T an, wir wollen es Flächennachbar von T_0 nennen.

An jede Kante von T_0, die einen Endpunkt von σ_0 gemein hat, legt sich ein einziges Oktaeder T an, das nicht zugleich Flächennachbar ist. Es werde Kantennachbar genannt.

An jede Ecke von T_0, die von 0 und ∞ verschieden ist, stosst ein einziges Oktaeder T, das nicht einer der beiden schon genannten Kategorien angehört; wir nennen es Eckennachbar von T_0.

Dieselben Behauptungen gelten für jedes andere Oktaeder T ebenso.“

In der folgenden Tabelle (6) sind diejenigen Substitutionen angegeben, die einen Flächennachbar (Kanten- und Eckennachbaren lassen wir, da sie weniger wichtig sind, weg) von T_0 aus T entstehen lassen, sowie die Seitenfläche von T_0, an welche sich der betreffende Nachbar stützt. — Die Substitutionen sind die bereits unter (5) aufgeführten.

Seitenfläche	Substit.	Seitenfläche	Substit.
$c-2b_1=0$	$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$	$a-2b_1=0$	$\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$
$c-2b_2=0$	$\begin{pmatrix}1&i\\0&1\end{pmatrix}$	$a-2b_2=0$	$\begin{pmatrix}i&0\\1&-i\end{pmatrix}$
$c+2b_1=0$	$\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$	$a+2b_1=0$	$\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}$
$c+2b_2=0$	$\begin{pmatrix}1&-i\\0&1\end{pmatrix}$	$a+2b_2=0$	$\begin{pmatrix}-i&0\\1&i\end{pmatrix}$

(7)

Indem man die Gleichungen der Seitenflächen von T_0 irgend einer dieser Substitutionen unterwirft, erhält man die Seitenflächen des bezüglichen Nachbars. Man konstatiert auf diese Weise ohne Schwierigkeiten die Richtigkeit der Behauptungen in Satz 9.

§ 11.
Die definite Hermitesche Form.

Als Hermitesche Form bezeichnet man einen Ausdruck von der Gestalt

$$auu_0 + buv_0 + b_0u_0v + cvv_0. \tag{1}$$

Von den Koeffizienten $a\,b\,b_0\,c$ derselben sind a und c reelle, b und b_0 konjugiert komplexe Zahlen, u und v sind zwei beliebige komplexe Grössen, u_0 und v_0 sind die dazu konjugierten Zahlwerte. [1])

Sind b_1 und b_2 die Komponenten von b, also dass $b = b_1 + i \cdot b_2$ ist, dann soll der Ausdruck (1) abkürzend auch mit

$$(a\,b\,b_0\,c) \text{ oder gelegentlich } (a\,b_1\,b_2\,c)$$

bezeichnet werden.

Wie man aus (1) erkennt, ist $(a\,b\,b_0\,c)$ immer eine reelle Grösse.

Da es sich bei unsern Untersuchungen stets nur um das Verhältnis der Koeffizienten der Form handeln wird, so wollen wir ein für allemal die Voraussetzung treffen $\mathbf{a} \geqq \mathbf{0}$. Ferner sind $(a\,b\,b_0\,c)$ und $(a'\,b'\,b_0'\,c)$ zwei Hermitesche Formen, deren Koeffizienten den Proportionen genügen

$$a' : b' : b_0' : c' = a : b : b_0 : c,$$

dann wollen wir dieselben als nicht wesentlich verschieden auffassen.

Zunächst wollen wir nun der Hermiteschen Form $(a\,b\,b_0\,c)$ als geometrischen Repräsentanten — vgl. die allgemeine Erörterung in § 1 — denjenigen Punkt $(x\,y\,y_0\,z)$ zuordnen, dessen homogene Koordinaten der Beziehung genügen

$$x : y : y_0 : z = a : b : b_0 : c.$$

Wenn die Form $(a\,b\,b_0\,c)$ für jedes Paar komplexer Zahlen u und v immer dasselbe (etwa positive) Vorzeichen hat, ausgeschlossen der Fall $u = v = 0$, so bezeichnet man die Form als eine definite Hermitesche Form.

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass $(a\,b\,b_0\,c)$ eine definite Form sei, ist

$$bb_0 - ac < 0, \tag{2}$$

wie man an Hand der Bemerkung 3, § 2 leicht erkennt.

Man übersieht schliesslich die Richtigkeit des folgenden Satzes:

> „Der definiten Hermiteschen Form $(a\,b\,b_0\,c)$ entspricht eindeutig als Repräsentant derjenige Punkt im Innern der Kugel $\mathfrak{K}$, dessen homogene Koordinaten sind a, b, b_0, c.“

Die abgekürzte Schreibweise $(a\,b\,b_0\,c)$ bezw. $(a\,b_1\,b_2\,c)$ möge sich fernerhin sowohl auf die Hermitesche Form selber, als auch auf deren Repräsentanten beziehen.

§ 12.
Die Theorie der Reduktion der definiten Hermiteschen Form.

Im vorangehenden Paragraphen ist der definiten Hermiteschen Form ein bestimmter Punkt im Innern der Kugel $\mathfrak{K}$ als Repräsentant zugeordnet worden. In ganz natürlicher Weise knüpft sich hieran die Aufstellung derjenigen Invariante, die wir der Theorie der Transformationen der definiten Hermiteschen Formen zu grunde legen wollen (vgl.

---

[1]) Die hier angenommene Fassung der definiten Hermiteschen Form, wie auch die der später folgenden Dirichletschen Form, sind etwas allgemeiner als die sonst usuelle, vgl. Aut. I, p. 450 und 452.

Diskussion in § 1). Als Element σ, das wir der einzelnen Substitution $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ der Gruppe Γ zuordnen werden, nehmen wir die Elementarsehne $\left(\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\delta}\right)$ an.

Die Entfernung des repräsentierenden Punktes $(a\,b\,b_0\,c)$ von der Sehne $\left(\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\delta}\right)$ soll dann diese Invariante sein.

Zunächst muss nun untersucht werden, wie die Transformation der Hermiteschen Form und diejenige des Repräsentanten derselben sich zueinander verhalten; um nachher sich ganz nur auf die Betrachtung der Transformationen des Punktes zu beschränken. Nach Aufstellung des Begriffes der reduzierten Form wird sich dann auch der Gang der Reduktion in ungezwungener Weise finden lassen.

Unterwirft man die Hermitesche Form $(a\,b\,b_0\,c)$ der linearen Substitution

$$\begin{aligned} u &= \alpha u' + \gamma v' \\ v &= \beta u' + \delta v' \end{aligned} \tag{1_a}$$

deren Schema

$$\begin{pmatrix}\alpha & \gamma \\ \beta & \delta\end{pmatrix} \tag{1}$$

ist und geht dieselbe dabei über in die Form $(a'\,b'\,b_0'\,c')$, so findet man bei Durchführung der Rechnung

$$\begin{aligned} a' &= a\alpha\alpha_0 + b\alpha\beta_0 + b_0\alpha_0\beta + c\beta\beta_0 \\ b' &= a\alpha\gamma_0 + b\alpha\delta_0 + b_0\beta\gamma_0 + c\beta\delta_0 \\ b_0' &= a\alpha_0\gamma + b\beta_0\gamma + b_0\alpha_0\delta + c\beta_0\delta \\ c' &= a\gamma\gamma_0 + b\gamma\delta_0 + b_0\gamma_0\delta + c\delta\delta_0 \end{aligned} \tag{2}$$

Abgesehen von der Bezeichnung der Grössen $(a\,b\,b_0\,c)$ — an Stelle von $(x\,y\,y_0\,z)$ — stimmt dieses Gleichungssystem vollkommen überein mit (3) in § 6, welch letzteres diejenige Transformation ergibt, welche der Punkt $(x\,y\,y_0\,z)$ bei der Substitution

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \tag{3}$$

erleidet. Aus dem Vergleich von (1) und (3) folgt somit:

1. Satz: „Sind P und P' die Repräsentanten der Formen $(a\,b\,b_0\,c)$ und bezw. $(a'\,b'\,b_0'\,c')$ und geht die zweite Form aus der ersten hervor durch die Substitution

$$S = \begin{pmatrix}\alpha & \gamma \\ \beta & \delta\end{pmatrix},$$

dann entspringt der Repräsentant P' derselben aus demjenigen P der ersten Form, durch die zu S transponierte Transformation

$$S' = \begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\text{“.}$$

Gestützt auf diesen innigen Zusammenhang zwischen S und S' ist es möglich, die Theorie der Transformationen der definiten Hermiteschen Formen zu ersetzen durch diejenige der Transformationen eines innern Punktes der Kugel $\mathfrak{K}$. Es kann nun die folgende Definition aufgestellt werden.

Definition: Die definite Hermitesche Form soll dann und nur dann als reduziert betrachtet werden, wenn der Repräsentant derselben im Innern oder auf der Begrenzung des Fundamentaloktaeders T_0 gelegen ist, d. h., wenn die Koeffizienten derselben den Bedingungen (B′) § 10 genügen.

Wie aus § 10 bekannt, besitzt daher eine reduzierte Hermitesche Form die Eigenschaft, dass ihr repräsentierender Punkt von der Fundamentalsehne σ_0 eine kleinere oder höchstens ebenso grosse Entfernung hat wie von jeder andern Elementarsehne σ.

Bei der Reduktion der Form $(a\,b\,b_0\,c)$ handelt es sich daher darum, die Entfernung des Punktes $(a\,b\,b_0\,c)$ von der Sehne σ_0 zu einem Minimum zu machen, d. h. es muss, gemäss Satz 1 § 9 das Produkt $a\cdot c$ so lange reduziert werden, bis eine weitere Reduktion nicht mehr möglich ist.

Bekanntlich haben nun solche acht Punkte, die einander aequivalent sind durch die Transformationen der Gruppe $(\bar{U})$, alle von der Fundamental sehne σ_0 dieselbe Entfernung; ersetzt man daher bei der Reduktion irgend einen derselben durch einen beliebigen der sieben andern, so entfernt man sich dabei jedenfalls nicht von dem angestrebten Ziele.

Bevor wir auf die reduzierenden Substitutionen eingehen, sollen noch zwei Bemerkungen vorausgeschickt werden, von denen wir in der Folge Gebrauch zu machen haben.

1. Bemerkung. Ist $(a\,b\,b_0\,c)$ eine beliebige definite Hermitesche Form, so ist nicht nur $a > 0$ (nach früherer Voraussetzung), sondern auch $c > 0$. Es deckt sich diese Behauptung vollkommen mit Bemerkung 2 § 2.

Aus § 6 wissen wir ferner, dass der Ausdruck

$$bb_0 - a \cdot c$$

(als Polynom der Gleichung der Kugel $\mathfrak{K}$), eine Invariante ist, die sich in keiner Weise ändert, wenn man die Koordinaten a, b, b_0, c einer Transformation S unterwirft. Ihr Wert ist eine negative endliche Zahl die wir mit $-p$ bezeichnen wollen, wo dann p eine positive endliche Grösse bedeutet, so dass

$$a \cdot c = p + bb_0$$

gesetzt werden kann.

2. Bemerkung. Wir denken uns die Koordinaten $(a\,b\,b_0\,c)$ einer ganzen Reihe von Substitutionen S unterworfen, fassen dabei immer die grössere der beiden Zahlen a und c ins Auge, sei $\bar{a}$ dieselbe, und verlangen, dass die Reihe der Substitutionen so beschaffen sei, dass $\bar{a}$ eine Reihe von Zahlwerten durchläuft, die beständig kleiner werden (aber nach Bemerkung 1 immer > 0 bleiben), dann kann dabei die kleinere $\bar{c}$ nie unter jede endliche Grösse hinunter sinken, gleichgültig wie b sich auch verhalten mag.

In der Tat ist ja immer $bb_0 \geqq 0$, und daher $c \geqq \dfrac{p}{a}$. Ist $(a^*\,b^*\,b_0^*\,c^*)$ diejenige Form bezw. derjenige Punkt, von dem wir bei der Reduktion ausgegangen sind, und bedeutet $\bar{a}^*$ die grössere der beiden Zahlen a^* und c^*, und ist ferner $\mathbf{q} = \dfrac{\mathbf{p}}{\mathbf{a}^*}$, so ist q eine positive

endliche Zahl von der Eigenschaft, dass beständig

$$c \geqq q$$

erfüllt ist.

Da, wie schon gesagt, die Transformationen der Gruppe $(\bar{U})$, die Entfernung des Punktes $(a\,b\,b_0\,c)$ von der Fundamentalsehne σ_0 nicht ändern, machen wir Gebrauch von Bemerkung 1, § 8; d. h. wir greifen von den acht Punkten, die zu einem gegebenen aequivalent sind, durch die Substitutionen der Gruppe (U) immer denjenigen Punkt P heraus, dessen Koordinaten den Bedingungen genügen

$$a \geqq c; \quad b_1 + b_2 \geqq 0; \quad b_1 - b_2 > 0, \tag{4}$$

wir wollen annehmen, dass der Punkt $(a\,b_1\,b_2\,c)$ selber dieser Punkt P sei.

Aus den Relationen (B′), § 10 folgt, dass der Punkt P: $(a\,b_1\,b_2\,c)$ dann und nur dann dem Fundamentaloktaeder T_0 angehört, so bald seine Koordinaten noch der Bedingung genügen

$$c - 2b_1 \geqq 0. \tag{5}$$

— Sind (4) und (5) erfüllt, so sind alle Ungleichungen (B′) § 10 befriedigt. —

Nehmen wir nun an (5) sei noch nicht befriedigt, sondern es sei vielmehr

$$c - 2b_1 < 0, \tag{6}$$

und unterwerfen wir P der Transformation

$$N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

so gehen dabei (vgl. (3), § 6)

$$\begin{array}{llll} a & \text{in } a - 2b_1 + c & b_2 & \text{in } b_2 \\ b_1 & \text{in } b_1 - c & c & \text{in } c \end{array} \tag{N}$$

über, und ferner das Produkt

$$a \cdot c \text{ in } a \cdot c + (c - 2b_1) \cdot c. \tag{7}$$

Das letztere ergibt die Entfernung des transformierten Punktes von der Sehne σ_0.

An Hand von Bemerkung 1 und von (6) überzeugt man sich daher von der Richtigkeit des folgenden Satzes.

> 2 . Satz: „Die Operation (N) reduziert die Entfernung eines Punktes $(a\,b_1\,b_2\,c)$, dessen Koordinaten den Bedingungen (4) genügen, von der Fundamentalsehne σ_0 immer, solange der Punkt dem Fundamentaloktaeder T_0 noch nicht angehört."

Die Reduktion wird daher in der folgenden Weise zu geschehen haben. Wir fassen nach jeder Operation (N) denjenigen der acht Punkte ins Auge, der dem eben erhaltenen aequivalent ist durch eine Substitution der Gruppe $(\bar{U})$, und dessen Koordinaten den Bedingungen (4) genügen, und diesen unterwerfen wir von neuem der Substitution (N);

das wird solange wiederholt, als die Relation (5) noch nicht erfüllt ist. Da ja hierbei die Entfernung des betrachteten Punktes von der Sehne σ_0 beständig verkleinert wird, so muss dieselbe einmal ein Minimum werden, wo dann der Punkt ins Innere oder auf die Begrenzung von T_0 zu liegen kommt, und die korrespondierende Hermitesche Form eine reduzierte ist.

Wir wollen zum Schluss dieses Paragraphen noch zeigen, dass das gewünschte Ziel für jede definite Hermitesche Form nach endlich vielen Operationen (N) eintritt. Die Überlegung ist die folgende. Zunächst bewirken die zwischen die Operationen (N) eingeschobenen Transformationen U nur eine Vertauschung von a und c und bezw. von $\pm b_1$, $\pm b_2$ untereinander (vgl. (5), § 8), und zwar so, dass an Stelle von a die grössere der beiden Zahlen a und c tritt und ferner an Stelle von b_1 die grössere von $|b_1|$ und $|b_2|$, die absoluten Beträge der vier Zahlen bleiben dabei ungeändert. Solange der Punkt P noch nicht dem Oktaeder T_0 angehört, wird durch die Operation (N) wie aus (N) folgt

a um $2b_1 - c$,
b_1 um c verkleinert, während
b_2 und c ungeändert bleiben.

Bei dem besprochenen Verfahren wird also beständig von der grösseren der beiden Zahlen $|b_1|$ und $|b_2|$ eine Grösse c subtrahiert, die wohl kleiner wird (mit a), die aber immer grösser ist als eine endliche Zahl q (vgl. Bemerkung 2 oben), währenddem die andere der beiden Zahlen $|b_1|$ und $|b_2|$ ungeändert bleibt. Machen wir Gebrauch von der Bezeichnung in Bemerkung 2, wo $(a^* \, b_1^* \, b_2^* \, c^*)$ die Ausgangsform war, und bedeuten n und m diejenigen beiden ganzen rationalen Zahlen, die

$$\frac{|b_1|}{q} - 1 < n \leqq \frac{|b_1|}{q}; \quad \frac{|b_2|}{q} - 1 < m \leqq \frac{|b_2|}{q}$$

genügen, dann werden noch höchstens $(n+m)$ Operationen (N) $|b_1|$ und $|b_2|$ die Bedingungen

$$2|b_1| \geqq q > |b_1|; \quad 2|b_2| \geqq q > |b_2|$$

befriedigen. Nimmt man nun den ungünstigsten Fall an, dass der dann auftretende Wert von c, $\bar{c}$ sei derselbe, er ist nach Bemerkung 2 $\geqq q$, auch

$$2|b_1| \geqq \bar{c} > |b_1|; \quad 2|b_2| \geqq \bar{c} > |b_2|$$

Genüge leiste, so erhält man, wenn man die Operation (N) noch höchstens zweimal wiederholt, für die linke Seite von (5)

$$\begin{aligned} \bar{c} - 2(\bar{c} - |b_1|) &= 2|b_1| - \bar{c} \geqq 0 \\ \bar{c} - 2(\bar{c} - |b_2|) &= 2|b_2| - \bar{c} \geqq 0, \end{aligned}$$

d. h. die Ungleichung (5) ist dann erfüllt und das ist um so mehr der Fall, wenn nach der ersten dieser Operationen an Stelle von $\bar{c}$ ein noch kleinerer Wert tritt. Nach höchstens $n+m+2-$Operationen (N), also auch einer endlichen Anzahl, ist somit die Ausgangsform in eine reduzierte Form übergeführt.

§ 13
Der Algorithmus der Reduktion der definiten Hermiteschen Form.

Aus der Diskussion in § 12 folgt, dass die Operation N die einzige notwendige reduzierende Substitution ist, sofern man noch die Transformationen der Gruppe $(\bar{U})$ zu Hülfe nimmt.

Durch diese letztern kann jeder beliebige Punkt in einen eindeutig bestimmten Punkt übergeführt werden, dessen Koordinaten die Relationen

$$a \geqq c; \quad b_1 + b_2 \geqq 0; \quad b_1 - b_2 > 0 \tag{1}$$

befriedigen. Diese Überführung hat nach jeder reduzierenden Operation zu geschehen, wenn die Koordinaten des neuen Punktes (1) nicht mehr Genüge leisten.

Nun ist bekanntlich die allgemeine Substitution $U = U_1^r U_2^s$ (vgl. (3) § 8). Um die gewünschte Transformation U zu bewerkstelligen, wird man am einfachsten etwa folgendermassen verfahren.

Ist $a \geqq c$, so genügt es, die Transformation

$$U_1(a\, b_1\, b_2\, c) = (a, -b_2, b_1, c) \tag{2}$$

so oft zu wiederholen, bis die beiden letzten Ungleichungen (1) erfüllt sind.

Ist $a < c$, so lässt man die Transformation

$$U_2(a\, b_1\, b_2\, c) = (c, b_1, -b_2, a) \tag{3}$$

vorausgehen und wiederholt dann U_1 noch so oft als notwendig ist.

Der eigentliche Algorithmus besteht nun darin, aus gegebenen Zahlen $a\, b_1\, b_2\, c$, die (1) genügen, die beiden Aggregate

$$a - 2b_1 + c \quad \text{und} \quad b_1 - c \tag{4}$$

zu bilden und an Stelle von a und bezw. b_1 zu setzen. Die Operation (4) muss so oft wiederholt werden, bis endlich

$$c - 2b_1 \geqq 0 \tag{5}$$

ist, wobei $a\, b_1\, b_2\, c$ auch den Relationen (1) zu genügen haben. Ist das der Fall, so liegt der betreffende Punkt im Innern oder auf der Begrenzung von T_0, und die zugehörige definite Hermitesche Form ist eine reduzierte.

In den folgenden beiden Beispielen ist die Reduktion durchgeführt für die Formen

$$(37, -36, 27, 57) \quad \text{und}$$
$$(757, -522, -39, 362).$$

Zur Erläuterung der Tabellen sei bemerkt: Die erste Kolonne enthält die Koeffizienten $a\, b_1\, b_2\, c$, wie sie sich nach jeder reduzierenden Operation (4) ergeben. In der zweiten Kolonne sind die Transformationen U notiert, die die Form links in diejenige rechts $(\bar{a}\, \bar{b_1}\, \bar{b_2}\, \bar{c})$ überführen, welch letztere den Bedingungen (1) Genüge leisten. In der letzten Rubrik sind die Aggregate (4) selber angegeben.

R bedeutet diejenige Transformation, die den Repräsentanten aus seiner Anfangslage in denjenigen Bereich von T_0 übergehen lässt, der durch die Ungleichungen (1) noch näher charakterisiert ist.

1. Beispiel.

Form (37, -36, 27, 57).

a	b_1	b_2	c	U	$\bar a$	$\bar b_1$	$\bar b_2$	$\bar c$	$\bar a - 2\bar b_1 + \bar c$	$\bar b_2 - \bar c$
37	−36	27	57	$U_1^2U_2$	57	36	27	37	22	−1
22	−1	27	37	U_1U_2	37	27	−1	22	5	5
5	5	−1	22	U_2	22	5	1	5	17	0
17	0	1	5	U_1^3	17	1	0	5		

(17, 1, 0, 5) reduzierte Form.

$$R = U_1^3 N U_2 N U_1 U_2 N U_1^2 U_2 = \begin{pmatrix} 2+i & 2 \\ 1-i & -i \end{pmatrix}.$$

2. Beispiel.

Form (757, -522, -39, 362).

a	b_1	b_2	c	U	$\bar a$	$\bar b_1$	$\bar b_2$	$\bar c$	$\bar a - 2\bar b_1 + \bar c$	$\bar b_2 - \bar c$
757	−522	−39	362	U_1^2	757	522	39	362	75	160
75	160	39	362	U_2	362	160	−39	75	117	85
117	85	−39	75						22	10
22	10	−39	75	$U_1^3U_2$	75	39	−10	22	19	17
19	17	−10	22	U_2	22	17	10	19	7	−2
7	−2	10	19	U_1U_2	19	10	−2	7	6	3
6	3	−2	7	U_2	7	3	2	6		

(7, 3, 2, 6) reduzierte Form.

$$R = U_2 N U_1 U_2 N U_2 N U_1^3 U_2 N N U_2 N U_1^2 = \begin{pmatrix} 1+4i & 1+6i \\ 1-5i & 2-7i \end{pmatrix}.$$

§ 14.
Die reduzierte Form.

Es ermangelt noch, einige Bemerkungen, die reduzierte Form betreffend, folgen zu lassen. Wir wollen die Koeffizienten einer reduzierten Form fernerhin mit grossen Buchstaben bezeichnen.

Ist $(A\,B_1\,B_2\,C)$ derjenige Punkt, bezw. diejenige Form, auf die wir schliesslich geführt werden bei dem im vorangehenden Paragraphen geschilderten Verfahren, so genügen $A\,B_1\,B_2\,C$ den Bedingungen (1) und (5) § 13, d. h. es ist

$$A \geqq C; \quad B_1 + B_2 \geqq 0; \quad B_1 - B_2 > 0; \quad C - 2B_1 \geqq 0. \tag{1}$$

Vermöge der Transformationen der Gruppe $(\bar U)$ gibt es zu der Form $(A\,B_1\,B_2\,C)$ das folgende System von aequivalenten reduzierten Formen.

$$\begin{array}{llll} \alpha & (A \;\; B_1 \;\; B_2 \; C) & \beta & (A \; -B_2 \;\; B_1 \; C) \\ & (A \; -B_1 \; -B_2 \; C) & & (A \;\; B_2 \; -B_1 \; C) \\ & (C \;\; B_1 \; -B_2 \; A) & & (C \;\; B_2 \;\; B_1 \; A) \\ & (C \; -B_1 \;\; B_2 \; A) & & (C \; -B_2 \; -B_1 \; A) \end{array} \tag{2}$$

(vgl. 5 § 8). Wie wir schon aus § 8 wissen, gehört die Aequivalenz der acht Formen (2) nicht der Picardschen Gruppe Γ allein an, sondern vielmehr der Gruppe $\bar{\Gamma}$, indem ja die Transformation U_1 von der Determinante i und nicht 1 ist.

Die acht Substitutionen U zerfallen in zwei Quadrupel

$$\begin{array}{llll} \alpha: U_1^0, & U_1^2, & U_2, & U_1^2 U_2 \\ \beta: U_1, & U_1^3, & U_1 U_2, & U_1^3 U_2 \end{array} \tag{3}$$

von der Eigenschaft, dass die Substitutionen des ersten Quadrupels α der Gruppe Γ, diejenigen des zweiten Quadrupels β nur erst der Gruppe $\bar{\Gamma}$ angehören; zugleich gehen die Transformationen (3) β aus denen von (3) α hervor, wenn man zu diesen letzteren nochmals die Substitution U_1 hinzunimmt. Daraus folgt, dass diejenigen Formen, die etwa aus der einen $(A\, B_1\, B_2\, C)$ entspringen durch die Transformationen eines der beiden Quadrupel von (3) einander aequivalent sind durch die Picardsche Gruppe Γ.

Bei Betrachtung von (5), (6) und (7) § 8 erkennt man, dass dann $(2\,\alpha)$ das eine, $(2\,\beta)$ das andere System von einander aequivalenten reduzierten Formen bildet.

Gibt es, wie eben dargetan wurde, im allgemeinen vier zu einer gegebenen Form aequivalente, reduzierte Formen, so können doch Spezialfälle eintreten, wo diese Anzahl vermindert, bezw. vermehrt wird. Es hängt dies zusammen mit der Lage, die der Repräsentant der reduzierten Form im Fundamentaloktaeder T_0 einnimmt.

Sind z. B. $B_1 = 0$ und $B_2 = 0$, so gibt es nur die beiden reduzierten Formen

$$(A\,0\,0\,C) \text{ und } (C\,0\,0\,A)$$

Ebenso wenn $A = C$ und $B_1 = 0$, oder wenn $A = C$ und $B_2 = 0$ ist, dann gibt es auch nur je zwei reduzierte Formen, nämlich

$$\begin{array}{l} (A\,0\,B_2\,A) \text{ und } (A\,0\,-B_2\,A), \text{ bezw.} \\ (A\,B_1\,0\,A) \text{ und } (A\,-B_1\,0\,A). \end{array}$$

Ist gar $A = C$ und $B_1 = B_2 = 0$, so gibt es nur die eine reduzierte Form

$$(A\,0\,0\,A)$$

deren Repräsentant der Mittelpunkt der Kugel $\mathfrak{K}$ ist.

In den eben angeführten Fällen liegt der Repräsentant in der Hauptdiagonale, bezw. in einer Mittellinie des Oktaeders T_0. Gehört derselbe jedoch der Begrenzung von T_0 an, dann gibt es gewöhnlich eine grössere Anzahl von reduzierten Formen. Liegt er beispielsweise auf der Seitenfläche $c = 2b_1$, dann tritt zu den vier Formen, die gemäss $(2\,\alpha)$ erhalten werden, noch ein weiteres Quadrupel von reduzierten Formen, indem nämlich diejenige Transformation, die den an die Seite $c = 2b_1$ anstossenden Flächennachbar von T_0 in T_0 selber überführt, im allgemeinen zu einem neuen Repräsentanten einer reduzierten Form Anlass gibt, der sich in gewöhnlicher Weise vervierfältigt. Man findet

in diesem Falle die folgenden acht reduzierten Formen

$$\begin{array}{ll} (A \quad \frac{C}{2} \quad B_2\ C) & (A\ -\frac{C}{2} \quad B_2\ C) \\ (A\ -\frac{C}{2}\ -B_2\ C) & (A \quad \frac{C}{2}\ -B_2\ C) \\ (C\ -\frac{C}{2} \quad B_2\ A) & (C \quad \frac{C}{2} \quad B_2\ A) \\ (C \quad \frac{C}{2}\ -B_2\ A) & (C\ -\frac{C}{2}\ -B_2\ A). \end{array}$$

Auf analoge Systeme wird man geführt, wenn der Repräsentant auf einer der andern Seitenflächen von T_0 liegt, oder wenn er einer Kante desselben angehört.

Es muss nun natürlich auch noch entschieden werden, welches der beiden Formensysteme ($2\,\alpha$ und β) der ursprünglich gegebenen. nicht reduzierten Form aequivalent ist bezüglich der Gruppe Γ.

Der Entscheid ist ein sehr einfacher. Die Substitutionen U_2 (vgl. 2, § 8) und N (vgl. § 12) sind von der Determinante 1, U_1 dagegen besitzt die Determinante i (vgl. 2, § 8). Nimmt man nun die Reduktion in der Weise vor, wie in § 12 gezeigt wurde, so hat die fertige reduzierende Substitution R die Gestalt

$$R = U_1^{r_1} U_2^{s_1} N U_1^{r_2} U_2^{s_2} N U_1^{r_3} U_2^{s_3} N U_1^{r_4} \dots \tag{4}$$

Soll dies eine Transformation der Gruppe Γ sein, so muss die Determinante

$$|R| = \pm 1$$

sein. Aus (4) folgt nun aber, dass

$$|R| = i^{(r_1+r_2+r_3+\cdots)} \tag{5}$$

wird, und daraus erkennt man die Richtigkeit der folgenden

B e m e r k u n g. a) Ist in R

$$r_1 + r_2 + r_3 + \cdots = 2n,$$

wo n eine ganze rationale Zahl bedeutet, dann ist $(A\,B_1\,B_2\,C)$ eine der ursprünglich gegebenen, aequivalente reduzierte Form und das Quadrupel $(2\,\alpha)$ ist die Gesamtheit aller aequivalenten reduzierten Formen.

b) Ist aber in R

$$r_1 + r_2 + r_3 + \cdots = 2n + 1,$$

wo n dieselbe Bedeutung hat wie oben, dann ist $|R| = \pm i$, dagegen ist dann $|U_1 R| = \pm 1$. Nun geht bekanntlich das Formensystem $(2\,\beta)$ aus demjenigen $(2\,\alpha)$ hervor durch die Transformation U_1, es ist daher in diesem Falle $(2\,\beta)$ das System der reduzierten Formen, die zu der ursprünglich gegebenen Form aequivalent sind.

Um die im vorigen Paragraphen durchgeführten Beispiele zu ergänzen, sei noch folgendes beigefügt.

Für das erste Beispiel ist

$$r_1 + r_2 + r_3 + \cdots = 3 + 1 + 2 = 6;$$

die zu der Form

$$(37, -36, 27, 57)$$

gehörigen aequivalenten reduzierten Formen sind daher

$$\begin{array}{ll} (17, \quad 1, 0, 5) & (5, \quad 1, 0, 17) \\ (17, -1, 0, 5) & (5, -1, 0, 17). \end{array}$$

Die reduzierende Substitution ist, wie wir aus Satz 1 § 12 wissen, die transponierte zu

$$R = \begin{pmatrix} 2+i & 2 \\ 1-i & -i \end{pmatrix} \text{ also } \begin{pmatrix} 2+i & 1-i \\ 2 & -i \end{pmatrix}$$

Für das zweite Beispiel ist

$$r_1 + r_2 + r_3 + \cdots = 1 + 3 + 2 = 6,$$

und da ausserdem die reduzierte Form (7, 3, 2, 6) der Bedingung genügt $2B_1 - C = 0$, so wird das System der zu

$$(757, -522, -39, 362)$$

aequivalenten reduzierten Formen das folgende

$$\begin{array}{ll} (7, \quad 3, \quad 2, 6) & (7, -3, \quad 2, 6) \\ (7, -3, -2, 6) & (7, \quad 3, -2, 6) \\ (6, -3, \quad 2, 7) & (6, \quad 3, \quad 2, 7) \\ (6, \quad 3, -2, 7) & (6, -3, -2, 7). \end{array}$$

Die reduzierende Substitution ist die transponierte zu

$$R = \begin{pmatrix} 1+4i & 1+6i \\ 1-5i & 2-7i \end{pmatrix}, \text{ also } \begin{pmatrix} 1+4i & 1-5i \\ 1+6i & 2-7i \end{pmatrix}$$

§ 15.
Die Dirichletsche Form.

Die Dirichletsche Form ist eine binäre quadratische Form von derselben Gestalt wie die Gauss'sche Form, nämlich

$$au^2 + 2buv + cv^2. \tag{1}$$

a, b, c, sind bestimmte, u und v beliebige komplexe Zahlen. — Wir wollen für dieselbe, d. h. für den Ausdruck (1) fernerhin das Symbol $(a\,b\,c)$ verwenden.

Da es bei den vorliegenden Untersuchungen wieder nur auf das Verhältnis der Koeffizienten a, b, c der Form ankommt, so wollen wir zwei Formen $(a\,b\,c)$ und $(a'\,b'\,c')$, die den Proportionen Genüge leisten

$$a' : b' : c' = a : b : c$$

als nicht wesentlich verschieden ansehen.

Gleich wie für die definite Hermitesche Form, suchen wir auch für die Dirichletsche Form ein geometrisches Gebilde an der Kugel $\mathfrak{K}$, das derselben eindeutig entsprechen soll.

Der Form $(a\,b\,c)$ können wir eindeutig die Gleichung

$$a\zeta^2 + 2b\zeta + c = 0$$

zuordnen, und dieser wiederum lassen wir die im Innern von $\mathfrak{K}$ gelegene Sehne $(a\,b\,c)$ korrespondieren (vgl. Diskussion § 5), und betrachten dieselbe als Repräsentant der Form (1). — Es ist dabei vorausgesetzt, dass die Diskriminante $D = b^2 - ac \mp 0$ sei. —

Wir wollen in Zukunft nicht nur die Form, sondern auch deren Repräsentant abkürzend mit $(a\,b\,c)$ bezeichnen.

Definition. Der Dirichletschen Form $(a\,b\,c)$, deren Diskriminante $b^2 - ac \mp 0$ sein soll, soll die im Innern der Kugel $\mathfrak{K}$ gelegene Sehne $(a\,b\,c)$ als eindeutig bestimmter Repräsentant zugeordnet werden.

Sehen wir zuerst zu, wie verhalten sich Form und zugehöriger Repräsentant gegenüber einer linearen Transformation.

Substituiert man in (1)

$$\begin{aligned} u &= \alpha u' + \beta v' \\ v &= \gamma u' + \delta v' \end{aligned} \quad \text{wo } \alpha\delta - \beta\gamma \mp 0, \tag{2}$$

so geht dieselbe über in die neue Form

$$a'u'^2 + 2b'u'v' + c'v'^2$$

und man findet durch einfache Rechnung

$$\begin{aligned} a' &= a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2 \\ b' &= a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + c\gamma\delta \\ c' &= a\beta^2 + 2b\beta\delta + c\delta^2. \end{aligned} \tag{3}$$

Sind nun ζ_1 und ζ_2 die Wurzeln der ursprünglichen Gleichung, also etwa

$$\zeta_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - ac}}{a}, \qquad \zeta_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - ac}}{a}, \tag{4}$$

und sind ferner ζ_1' und ζ_2' diejenigen der durch (2) transformierten Gleichung, so besteht der Zusammenhang

$$\zeta_1 = \frac{\alpha\zeta_1 + \beta}{\gamma\zeta_1' + \delta}, \qquad \zeta_2 = \frac{\alpha\zeta_2' + \beta}{\gamma\zeta_2' + \delta},$$

oder umgekehrt,

$$\zeta_1' = \frac{-\delta\zeta_1 + \beta}{\gamma\zeta_1 - \alpha}, \qquad \zeta_2' = \frac{-\delta\zeta_1' + \beta}{\gamma\zeta_1' - \alpha}. \tag{5}$$

In der Tat findet man, wenn man aus (4) ζ_1 entnimmt, in (5) einsetzt und $\sqrt{b_2 - ac}$ aus dem Nenner entfernt

$$\zeta_1' = \frac{-(a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + c\gamma\delta) + (a\delta - \beta\gamma)\sqrt{b^2 - ac}}{a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2}.$$

Wir kommen so zu dem Satz:

„Wenn die Form $(a\,b\,c)$ durch die Transformation

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

übergeht in die Form $(a'\,b'\,c')$, dann geht die repräsentierende Sehne $(a\,b\,c)$ durch die zu S inverse Transformation

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} -\delta & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}$$

in den Repräsentanten $(a'\,b'\,c')$ der transformierten Form über."

Durch diese Tatsache ist auch die folgende Festsetzung begründet.

Bedeutet S eine Transformation, der wir die Sehne $(a\,b\,c)$ unterwerfen und ist $(a'\,b'\,c')$ die dabei herauskommende neue Sehne, so wollen wir wie bisher schreiben

$$(a'\,b'\,c') = S(a\,b\,c).$$

Ist aber S eine Transformation, die wir auf die Form $(a\,b\,c)$ ausüben und geht dieselbe dadurch über in die Form $(a'\,b'\,c')$, so wollen wir das so schreiben

$$(a'\,b'\,c') = (a\,b\,c)S.$$

Es hat diese Unterscheidung in der Schreibweise ihren innern Grund. Bedeutet nämlich S_1 eine zweite lineare Transformation und unterwerfen wir sowohl die Form $(a\,b\,c)$ als auch die Sehne $(a\,b\,c)$ zuerst der Transformation S und dann der Transformation S_1 und sei $(a'\,b'\,c')$ die neue Form bezw. Sehne, so ist für die Sehne

$$(a'\,b'\,c') = S_1 S(a\,b\,c)$$

für die Form aber

$$(a'\,b'\,c') = (a\,b\,c)SS_1,$$

die zusammengesetzte Transformation ist also im ersten Falle S_1S, im zweiten Falle dagegen SS_1.

§ 16.
Einführung derjenigen Invariante, auf welche die Theorie der Transformationen der Dirichletschen Form gegründet werden soll.

Als Repräsentanten der Form $(a\,b\,c)$ in der Kugel $\mathfrak{K}$ haben wir bereits im vorangehenden Paragraphen die Kugelsehne $(a\,b\,c)$ eingeführt. Es ermangelt noch einen geeigneten Repräsentanten σ für die Substitution

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \tag{1}$$

zu wählen, um dann die Invariante, auf die wir es gemäss der allgemeinen Diskussion in § 1 abgesehen haben, aufzustellen.

Es empfiehlt sich als σ denjenigen der Substitution (1) eindeutig korrespondierenden Punkt zu wählen, dessen Koordinaten sind

$$\alpha\alpha_0 + \beta\beta_0 : \alpha\gamma_0 + \beta\delta_0 : \alpha_0\gamma + \beta_0\delta : \gamma\gamma_0 + \delta\delta_0. \tag{2}$$

Wir wollen fernerhin den Punkt (2) mit M [1]) bezeichnen und es soll M_0 derjenige der Punkte M sein, für welchen $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, d. h. der Punkt (1, 0, 0, 1). Es ist das der Mittelpunkt der Kugel $\mathfrak{K}$.

Als Invariante, auf welche die Transformationstheorie der Dirichletschen Form gegründet werde, nehmen wir dann die Entfernung der Sehne $(a\,b\,c)$ vom Punkte M an; wir wollen sie kurz bezeichnen als Entfernung $(M, (a\,b\,c))$.

In § 5 haben wir gezeigt, dass die Entfernung der Sehne $(a'\,b'\,c')$ vom Punkte M_0 im wesentlichen bestimmt ist durch den Quotienten

$$\frac{a'a'_0 + 2b'b'_0 + c'c'_0}{\sqrt{DD_0}}, \text{ wo } D = b'^2 - a'c' \tag{3}$$

in dem Sinne, dass die Entfernung mit diesem Quotienten zugleich wächst und abnimmt.

Sei nun $(a'\,b'\,c')$ diejenige Sehne, welche durch die Transformation (1) nach der Sehne $(a\,b\,c)$ übergeführt wird, ist also

$$\text{Sehne } (a\,b\,c) = S(\text{Sehne } (a'\,b'\,c'))$$

so folgt aus dem Satz in § 15, dass

$$\text{Form } (a\,b\,c) = S^{-1}(\text{Form } (a'\,b'\,c')) \text{ oder}$$
$$\text{Form } (a'\,b'\,c') = S(\text{Form } (a\,b\,c))$$

ist. D. h. $a\,b\,c$ und $a'\,b'\,c'$ sind direkt durch das Formelsystem (3) § 15 miteinander verbunden. Es ist also

$$\begin{aligned} a' &= a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2\\ b' &= a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + c\gamma\delta\\ c' &= a\beta^2 + 2b\beta\delta + c\delta^2. \end{aligned} \tag{4}$$

Durch dieselbe Transformation (1) geht auch der Punkt M_0 über in den Punkt M (vgl. (2)). Denkt man sich daher in (3) an Stelle von $a'\,b'\,c'$ die Ausdrücke von (4) eingesetzt und zwar auch in D, dann bestimmt (3) die Entfernung der Sehne $(a\,b\,c)$ vom Punkte M.

Nun ist die Diskriminante $D = b'^2 - a'c'$ eine Invariante, die sich bei den Substitutionen der Gruppe Γ gar nicht ändert.

Der Nenner des Quotienten in (3) ist daher eine positive Konstante, soll somit der Bruch möglichst klein werden, so muss der (stets positive) Zähler möglichst klein werden, d. h. es muss

$$(a'a'_0 + 2b'b'_0 + c'c'_0)$$

ein Minimum werden.

Wir kommen so zu dem folgenden Satz:

[1]) Der Punkt M ist Mittelpunkt desjenigen Oktaeders, das zur Elementarsehne $\left(\frac{\alpha}{\gamma}, \ \frac{\beta}{\delta}\right)$ gehört.

„Soll die Entfernung der Sehne $(a\,b\,c)$ vom Punkte M, dessen Koordinaten durch (2) gegeben sind, eine kleinste werden, so muss

$$aa'_0 + 2b'b'_0 + c'c'_0$$

ein Minimum werden, wo man an Stelle von $a'\,b'\,c'$ die rechten Seiten der Gleichungen (4) gesetzt denken muss“.

Auf den Ausdruck

$$E = a'a'_0 + 2b'b'_0 + c'c'_0 \qquad (5)$$

werden wir also die Theorie der Transformationen der Dirichletschen Form, insbesondere die Reduktionstheorie derselben basieren.

§ 17.
Notwendige Bedingung dafür, dass die Sehne $(a\,b\,c)$ vom Punkte M_0 eine kleinste Entfernung habe.

Um die im Titel dieses Paragraphen ausgesprochene Forderung präziser fassen zu können, geben wir die folgende

Definition. Besitzt die Sehne $(a\,b\,c)$ die Eigenschaft, dass sie vom Punkte M_0 eine kleinere oder doch nicht grössere Entfernung hat, als von jedem andern Punkte M, so bezeichnen wir die Entfernung $(M_0, (a\,b\,c))$ als eine kleinste.

In § 5 sind unter (2) die Koordinaten desjenigen Punktes F' der Sehne $(a'\,b'\,c')$ notiert, welcher vom Mittelpunkte M_0 eine kleinere Entfernung hat als jeder andere Punkt von $(a'\,b'\,c')$.

Ist nun $(a\,b\,c)$ die betrachtete Form bezw. deren repräsentierende Sehne, so wollen wir in Zukunft immer denjenigen Punkt der Sehne, der von M_0 die kleinste Entfernung hat, kurz F-Punkt nennen und seine Koordinaten mit $(f_1\,f\,f_0\,f_2)$ bezeichnen. Sie sind zufolge (2) § 5

$$\begin{aligned} f_1 &= bb_0 + cc_0 + \sqrt{DD_0} \\ f &= -(a_0 b + b_0 c) \\ f_0 &= -(ab_0 + bc_0) \\ f_2 &= aa_0 + bb_0 + \sqrt{DD_0}. \end{aligned} \qquad (1)$$

Es soll nun der folgende Satz bewiesen werden:

„Die Entfernung der Sehne $(a\,b\,c)$ vom Punkte M_0 wird sicher nur dann ein Minimum, wenn der F-Punkt derselben dem Fundamentaloktaeder T_0 angehört.“

Um die Richtigkeit dieser Behauptung einzusehen, greifen wir aus der Gesamtheit der Punkte M diejenigen acht heraus, die Mittelpunkt je eines der Flächennachbaren von T_0 sind, und zeigen, dass die im obigen Satz ausgesprochene Forderung erfüllt sein muss, wenn man statt aller Punkte M nur die bewussten acht ins Auge fasst. — Denn gehört der F-Punkt T_0 nicht an, so hat unter diesen Voraussetzungen die Sehne $(a\,b\,c)$ wenigstens von einem jener acht Punkte M eine kleinere Entfernung als von M_0, und es ist dann auch die allgemeinere Forderung des obenstehenden Satzes nicht erfüllt.

Setzt man $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ in (2) § 16 ein, so erhält man die homogenen Koordinaten eines der acht Punkte M, sie sind (2, 1, 1, 1); wir wollen diesen mit M_1 bezeichnen.

Indem man einmal $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ und dann $= \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ annimmt und in (4) § 16 substituiert, ergeben sich die Grössen a', b', c', woraus sich dann das Aggregat (5) § 16 aufbauen lässt. Man erhält so die beiden Ausdrücke

$$\begin{aligned}E_0 &= aa_0 + 2bb_0 + cc_0 \quad \text{bezw.}\\ E_1 &= aa_0 + 2(a+b)(a_0+b_0) + (a+2b+c)(a_0+2b_0+c_0).\end{aligned}$$

E_0 und E_1 sollen die Abkürzungen sein für die rechten Seiten; sie bestimmen die Entfernungen der Sehne $(a\,b\,c)$ von den Punkten M_0 bezw. M_1.

Aus den Relationen (B′) § 10 folgt, dass der Punkt $(x\,y\,y_0\,z)$ jedenfalls nur dann dem Fundamentaloktaeder T_0 angehört, wenn seine Koordinaten neben anderen auch die folgende Bedingung erfüllen $z \geqq y + y_0$ (sie lautet an jener Stelle $z \geqq 2y_1$). Diese Ungleichung, angewendet auf den F-Punkt der Sehne $(a\,b\,c)$, ergibt, wie man aus (1) entnimmt,

$$B = aa_0 + bb_0 + (ab_0 + a_0b) + (bc_0 + b_0c) + \sqrt{DD_0} \geqq 0.$$

B soll die Abkürzung bedeuten für die linke Seite dieser Ungleichung.

Wir wollen nun zeigen, dass

$$E_1 \geqq E_0,$$

d. h. dass die Entfernung des Punktes M_1 von der Sehne $(a\,b\,c)$ wenigstens ebenso gross sei als die des Punktes M_0, nur dann erfüllt sein kann, wenn

$$B \geqq 0$$

ist. —

Es sollen die folgenden abkürzenden Bezeichnungen eingeführt werden.

$$\begin{aligned}aa_0 + bb_0 + \sqrt{DD_0} &= A \qquad & b\sqrt{D_0} + b_0\sqrt{D} &= L\\ bb_0 + cc_0 + \sqrt{DD_0} &= C \qquad & a\sqrt{D_0} + a_0\sqrt{D} &= J\\ aa_0 + ab_0 + a_0b &= R \qquad & 2aa_0 &= T.\end{aligned}$$

Durch elementare Rechnung bestätigt man die Richtigkeit der folgenden Relationen

$$\begin{aligned}A + C &= E_0 + 2\sqrt{DD_0}\\ A^2 - L^2 &= \tfrac{1}{2}T(A+C) = \tfrac{1}{2}T(E_0 + 2\sqrt{DD_0})\\ A\cdot R - L\cdot J &= \tfrac{1}{2}T\cdot B.\end{aligned} \tag{I}$$

Alle diese Ausdrücke sind, wie man sieht, reell.

Bedeutet nun λ eine beliebige reelle Zahl, so ist immer, wie im übrigen A und L auch beschaffen sein mögen,

$$\{(A-L) - \lambda(A+L)\}^2 \geqq 0,$$

hieraus folgt: es ist auch

$$\{(A-L)+\lambda(A+L)\}^2 \geqq 4\lambda(A^2-L^2) = 2\lambda T(E_0+2\sqrt{DD_0})$$

erfüllt. — In dieser letzten Ungleichung wollen wir nun

a	durch	a,	also	A	durch	$A+R$
b	„	$a+b$,		L	„	$L+J$
c	„	$a+2b+c$,		E_0	„	E_1

ersetzen, während T und D dabei ungeändert bleiben. Es ist dann auch

$$\{(A-L+R-J)+\lambda(A+L+R+J)\}^2 \geqq 2\lambda T(E_1+2\sqrt{DD_0}).$$

Wählen wir endlich noch

$$\lambda = \frac{A-L}{A+L}$$

und erweitern die ganze Ungleichung mit dem positiven Faktor $(A+L)^2$, so geht diese über in

$$\{(A+L)(A-L+R-J)+(A-L)(A+L+R+J)\}^2 \geqq 2(A^2-L^2)T(E_1+2\sqrt{DD_0}),$$

woraus schließlich unter Benützung von (I)

$$(E_0+2\sqrt{DD_0}+B)^2 \geqq (E_0+2\sqrt{DD_0})(E_1+2\sqrt{DD_0}) \qquad (2)$$

entspringt. Daraus folgt, da $E_0+2\sqrt{DD_0}+B$ sicher positiv [1]) ist, der

Satz: „Soll $E_1 \geqq E_0$ sein, so ist nach (2) umsomehr

$$(E_0+2\sqrt{DD_0}+B)^2 \geqq E_0+2\sqrt{DD_0})^2,$$

und da ja $E_0+2\sqrt{DD_0} > 0$ ist, so kann diese Ungleichung nur dann erfüllt sein, wenn $B \geqq 0$ ist.“

Indem wir nun dieselbe Diskussion durchführen für jeden andern der acht Punkte M, die wir zu Anfang dieses Paragraphen ins Auge gefasst haben, kommen wir noch zu sieben weiteren Bedingungen analog zu $B \geqq 0$, denen die Koordinaten (1) des F-Punktes der Sehne $(a\,b\,c)$ genügen müssen, und man überzeugt sich so sofort von der Richtigkeit der Behauptung, die in dem Satz am Anfang dieses Paragraphen ausgesprochen wurde.

Wir wollen noch eine Bemerkung folgen lassen, die sich auf das Minimum der Entfernung der Sehne $(a\,b\,c)$ vom Mittelpunkte M_0 bezieht.

Wenn a, b, c beliebige komplexe Zahlen sind, so bleibt es unentschieden, ob ein eigentliches Minimum der Entfernung $(M_0, (a\,b\,c))$ überhaupt existiert oder nicht. Sind aber a, b, c (rationale oder also) ganze komplexe Zahlen, so ist der Ausdruck

$$E = a'a_0' + b'b_0' + c'c_0'$$

— wo an Stelle von a', b', c' die rechten Seiten der Gleichungen (3) § 15 zu denken sind — eine positive ganze rationale Zahl. Wird E für einen bestimmten Punkt M etwa

[1]) Vgl. p. 61.

gleich der Zahl N, dann kann es für andere Punkte M zwar kleiner werden als N, doch ist nur noch eine endliche Auswahl von Möglichkeiten vorhanden, nämlich die Reihe von Werten

$$0, 1, 2, 3, \ldots, N-1.$$

In diesem Falle nimmt E jedenfalls einen bestimmten kleinsten Wert an, ob wir denselben nach einer endlichen Anzahl von Substitutionen erreichen können, werden wir in der Folge sehen.

§ 18.
Die Theorie der Reduktion der Dirichletschen Form.

In § 16 haben wir diejenige Invariante angegeben, auf welche die Theorie der Transformationen der Dirichletschen Form $(a\,b\,c)$ gegründet werden soll.

Es ist das die Entfernung der Sehne $(a\,b\,c)$ vom Punkte M. Übergehend zu der Reduktionstheorie, nehmen wir den Punkt M ein- für allemal fest an; am besten im Punkte M_0 und fundieren dann, analog wie bei der definiten Hermiteschen Form, die Reduktion der Form $(a\,b\,c)$ darauf, dass wir versuchen, die Entfernung der repräsentierenden Sehne derselben vom Punkte M_0 zu einem Minimum zu machen.

Vorerst wollen wir die reduzierte Dirichletsche Form so definieren.

Definition. Die Dirichletsche Form $(a\,b\,c)$ soll dann, und nur dann reduziert heissen, wenn die repräsentierende Sehne derselben wenigstens einen Punkt mit dem Fundamentaloktaeder T_0 gemein hat.

Aus dem Satz, den wir zu Anfang des vorangehenden Paragraphen ausgesprochen haben, folgt, wenn die Entfernung $(M_0, (a\,b\,c))$ nach endlich vielen reduzierenden Operationen ein Minimum geworden ist, dann ist die bezügliche Form sicher eine reduzierte. Nun wollen wir in diesem Paragraphen zeigen, dass es gar nicht notwendig ist, das vollkommene Minimum dieser Entfernung herzustellen, sondern dass es genügt, dasselbe anzustreben, um bereits nach einer endlichen Anzahl von Substitutionen auf eine reduzierte Form zu kommen.

Das Verfahren ist das folgende. Nach jeder Substitution fassen wir den F-Punkt der Sehne $(a\,b\,c)$ ins Auge, und gehen so vor, als hätten wir diesen Punkt in T_0 überzuführen. Der einzelne Schritt ist also derselbe wie bei der Reduktion der definiten Hermiteschen Form. Doch bemerken wir: sei $(a\,b\,c)$ die betrachtete Form bezw. deren repräsentierende Sehne, $(a'\,b'\,c')$ die durch die Substitution S aus $(a\,b\,c)$ entspringende Form, bezw. deren Repräsentant, dann geht im allgemeinen der F-Punkt der Sehne $(a'\,b'\,c')$ nicht aus dem F-Punkt von $(a\,b\,c)$ hervor, sofern wenigstens S nicht eine Substitution der Gruppe (U) ist, die den Punkt M_0 in sich transformieren. — Wir betrachten also bei der Reduktion nicht einen festen Punkt der die Form repräsentierenden Sehne, sondern einen veränderlichen Punkt derselben.

Die homogenen Koordinaten des F-Punktes der Sehne $(a\,b\,c)$ sind (vgl. 1, § 17).

$$\begin{aligned} f_1 &= bb_0 + cc_0 + \sqrt{DD_0} \\ f \; &= -(a_0 b + b_0 c) \\ f_0 &= -(ab_0 + bc_0) \\ f_2 &= aa_0 + bb_0 + \sqrt{DD_0}, \end{aligned} \tag{1}$$

oder indem wir an Stelle von f und f_0 f' und f'' einführen, derart, dass $f = f' + if''$ ist,

$$\begin{aligned} f_1 &= bb_0 + cc_0 + \sqrt{DD_0} \\ f' &= -R(ab_0 + bc_0) \\ f'' &= J(ab_0 + bc_0) \\ f_2 &= aa_0 + bb_0 + \sqrt{DD_0}, \end{aligned} \tag{1_a}$$

wo $R(\ )$ und $J(\ )$ den reellen Teil und bezw. den Koeffizienten von i des komplexen Argumentes bedeuten.

Vermöge der Substitutionen U, die, wie schon erwähnt, den F-Punkt einer Sehne nicht ändern, kann man immer erreichen, dass die Koordinaten desselben den Bedingungen (8), § 8 Genüge leisten; das gibt zu den folgenden Ungleichungen Anlass:

$$cc_0 \geqq aa_0; \ -R(ab_0 + bc_0) + J(ab_0 + bc_0) \geqq 0; \ -R(ab_0 + bc_0) - J(ab_0 + bc_0) \geqq 0, \tag{2}$$

denen die Koeffizienten a, b, c der Form immer unterworfen werden können.

Nehmen wir an, dass die vorliegende Form $(a\,b\,c)$ selber den Bedingungen (2) genüge, soll dann dieselbe noch nicht eine reduzierte Form sein, so darf die Relation $f_2 - 2f' \geqq 0$, d. i.

$$B = \sqrt{DD_0} + aa_0 + bb_0 + (ab_0 + a_0b) + (bc_0 + b_0c) \geqq 0 \tag{3}$$

— B bedeutet die Abkürzung für die linke Seite der Ungleichung — noch nicht erfüllt sein (vgl. (4) und (5), §12).

Unterwirft man nun die Form (a b c) der Transformation

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

wobei nach (3) § 15

$$\begin{aligned} &a \text{ in } a \\ &b \text{ in } a + b \\ &c \text{ in } a + 2b + c \end{aligned} \tag{N}$$

übergehen, so ist das gleichbedeutend als wenn man die Sehne $(a\,b\,c)$ und mit ihr den F-Punkt derselben, der zu N inversen Transformation

$$N^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

unterziehen würde (vgl. Satz § 15). Wie man sich sofort überzeugt, ist die Substitution N^{-1} hier gleichbedeutend mit der Substitution N § 12 und es folgt daher aus Satz 2, § 12, dass die Operation (N) eine Annäherung des F-Punktes, und daher auch der Sehne an das Oktaeder T_0 involviert.

Nun ist bekanntlich (Satz, § 16, indem man dort $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ annimmt)

$$E_0 = aa_0 + 2bb_0 + cc_0$$

derjenige Ausdruck, welcher die Entfernung der Sehne $(a\,b\,c)$ vom Punkte M_0 bestimmt. Analog wird daher

$$E_1 = aa_0 + 2(a+b)(a_0+b_0) + (a+2b+c)(a_0+2b_0+c_0)$$

die Entfernung der transformierten Sehne (vgl. (N)) von M_0 charakterisieren.

Wenn wir die Formen B, E_0 und E_1 mit den gleichbenannten in § 17 vergleichen, so sehen wir, dass sie mit jenen vollkommen übereinstimmen. Die Diskussion im eben zitierten Paragraphen hat nun folgendes ergeben.

Solange

$$B < 0$$

ist, ist auch immer

$$E_1 < E_0.$$

Daraus folgt, solange die Ungleichung (3) nicht erfüllt ist, reduziert immer die Operation (N) die Entfernung der gegebenen Sehne vom Mittelpunkt M_0.

Nun ist

$$E_0 + B = \sqrt{DD_0} + aa_0 + bb_0 + (a+b)(a_0+b_0) + (b+c)(b_0+c_0) > 0,$$

also ist umsomehr auch

$$E_0 + 2\sqrt{DD_0} + B > 0.$$

Aus der im letzten Paragraphen gewonnenen Ungleichung

$$(E_0 + 2\sqrt{DD_0} + B)^2 \geqq (E_0 + 2\sqrt{DD_0})(E_1 + 2\sqrt{DD_0})$$

die für ganz beliebige Werte von a, b und c gilt, folgt, dass, wenn $B < 0$ ist, dass dann auch

$$E_0 + 2\sqrt{DD_0} + B > E_1 + 2\sqrt{DD_0}$$

ist und hieraus ergibt sich endlich

$$\Delta E = E_0 - E_1 > |B|. \tag{5}$$

ΔE bedeutet die Differenz der Entfernungen der ursprünglichen Sehne und der, bei der Transformation (N) aus derselben entspringenden Sehne vom Punkte M_0; oder also die Annäherung der betrachteten Sehne an M_0, die die Operation N hervorbringt.

Da nun nach Voraussetzung (nämlich die Diskriminante der gegebenen Form sei von Null verschieden) die Entfernung der repräsentierenden Sehne der ursprünglich gegebenen Form von M_0 eine endliche war, und da ferner, wie man aus (5) ersieht, die Operation M solange $B < 0$ und dem Betrage nach endlich ist, immer eine endliche Reduktion dieser Entfernung hervorbringt, so muss nach endlich vielen Transformationen N die Entfernung einmal so klein werden, dass die Sehne wenigstens den F-Punkt mit dem Fundamentaloktaeder T_0 gemein hat.

Wie bei den Hermiteschen Formen, wollen wir auch hier zum Unterschied die Koeffizienten einer reduzierten Form mit grossen Lettern bezeichnen, also eine solche Form $(A\,B\,C)$ statt $(a\,b\,c)$ schreiben.

Entsprechend dem Umstande, dass der F-Punkt der Sehne nicht dem durch die Bedingungen ((4) und (5) §12) charakterisierten Teile von T_0 anzugehören braucht,

sondern beliebig in T_0 gelegen sein kann, lassen sich die Bedingungen (2) und (3) oben erweitern, so dass die Ungleichungen (2) ganz zum Wegfalle kommen und durch andere ersetzt werden. Man erhält das umfassendere System von Bedingungen, wenn man nicht nur die Form $(a\,b\,c)$, sondern jede Form $(a\,b\,c)U$ denselben Forderungen (2) und (3) unterwirft, wo U jede der Transformationen der Gruppe $(\bar{U})$ bedeuten soll.

Zufolge (2) § 8 und (3) § 15 ist

$$\begin{aligned} (a\,b\,c)U_1 &= (a, -ib, -c) \\ (a\,b\,c)U_2 &= (c, b, a) \end{aligned} \tag{6}$$

und daher

$$\begin{aligned} (ab_0 + bc_0)U_1 &= i(ab_0 + bc_0) \\ (ab_0 + bc_0)U_2 &= (a_0b + b_0c), \end{aligned} \tag{7}$$

woraus man allgemein $U(a\,b\,c)$ und $U(ab_0 + bc_0)$ entnehmen kann (vgl. 3 § 8).

Indem man nun zu (3) diejenigen Bedingungen hinzu nimmt, die aus ihr hervorgehen, wenn man an Stelle von a, b, c, $U(a\,b\,c)$ setzt, erhält man das folgende erweiterte System von Ungleichungen, denen die Koeffizienten der reduzierten Form $(A\,B\,C)$ zu genügen haben:

$$\begin{aligned} &\sqrt{DD_0} + AA_0 + BB_0 + 2|R\ (AB_0 + BC_0)| \geqq 0 \\ &\sqrt{DD_0} + AA_0 + BB_0 + 2|Ri(AB_0 + BC_0)| \geqq 0 \\ &\sqrt{DD_0} + BB_0 + CC_0 + 2|R\ (AB_0 + BC_0)| \geqq 0 \\ &\sqrt{DD_0} + BB_0 + CC_0 + 2|Ri(AB_0 + BC_0)| \geqq 0 \end{aligned} \tag{8}$$

Es sei noch bemerkt, dass die Bedingungen (8) zwar hinreichend sind dafür, dass die Form $(A\,B\,C)$ eine reduzierte ist, sie sind aber durchaus nicht notwendig, denn es kann auch Sehnen geben, deren F-Punkt nicht dem Fundamentaloktaeder T_0 angehört und die doch einen Punkt mit T_0 gemein haben. Von den Bedingungen (8) aber wissen wir, dass sie für jede gegebene Dirichletsche Form (deren Diskriminante nicht $= 0$ ist) durch endlich viele Operationen erzielt werden können.

Es würde nicht schwer fallen, bei Betrachtung der Diagonalebenen von T_0 die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für eine reduzierte Form aufzustellen, doch werden wir davon keinen Gebrauch machen.

§ 19.
Algorithmus der Reduktion der Dirichletschen Form.

Ist $(a\,b\,c)$ die zu reduzierende Form, so bilden wir zuerst

$$aa_0,\ cc_0 \text{ und } f = -(ab_0 + bc_0)$$

und sehen zu, ob die Bedingungen (2) § 18, d. i.

$$cc_0 \geqq aa_0; \quad R(f) + J(f) \geqq 0; \quad R(f) - J(f) > 0 \tag{1}$$

erfüllt sind. Sind sie nicht erfüllt, so erreicht man zuerst etwa durch die Transformation U_2, dass die erste der Bedingungen (1) befriedigt ist, und dann durch U_1^r, dass auch noch die beiden andern Ungleichungen erfüllt sind.

Aus rein praktischen Gründen wollen wir hier die aus (6) und (7) § 18 abgeleiteten Tabellen, die $(a\,b\,c)U$ und $(f)U$ ergeben, für jede der acht Transformationen der Gruppe $(\bar{U})$, vollständig notieren. Ein Blick auf dieselben wird, bei der Durchführung der Reduktion, genügen, um erkennen zu lassen, welche der Transformationen U die Form $(a\,b\,c)$ in diejenige Form überführt, deren Koeffizienten die Bedingungen (1) befriedigen.

$$\begin{array}{ll} (a\,b\,c)U_1^0 = (a, b, c) & (a\,b\,c) \quad U_2 \;= (c, b, a) \\ (a\,b\,c)U_1 \;= (a, -ib, -c) & (a\,b\,c)U_2U_1 = (c, -ib, -a) \\ (a\,b\,c)U_1^2 = (a, -b, c) & (a\,b\,c)U_2U_1^2 = (c, -b, a) \\ (a\,b\,c)U_1^3 = (a, ib, -c) & (a\,b\,c)U_2U_1^3 = (c, ib, -a) \end{array} \tag{2}$$

$$\begin{array}{ll} (f)U_1^0 = f & (f) \quad U_2 \;= f_0 \\ (f)U_1 \;= i \cdot f & (f)U_2U_1 = if_0 \\ (f)U_1^2 = -f & (f)U_2U_1^2 = -f_0 \\ (f)U_1^3 = -if & (f)U_2U_1^3 = -if_0. \end{array} \tag{3}$$

Ist dann $(a\,\bar{b}\,\bar{c})$ die aus Tabelle (3) erhaltene Form, deren Koeffizienten den Ungleichungen (1) Genüge leisten, und ist $\bar{f}$ der bezügliche Wert von f, so bestimmt man noch

$$B = \sqrt{DD_0} + \bar{a}\bar{a}_0 + \bar{b}\bar{b}_0 - 2R(\bar{f}), \tag{4}$$

wo $\sqrt{DD_0}$ eine zum voraus gegebene positive Konstante ist.

Wenn nun $B \geqq 0$ ist, so ist die Form bereits reduziert.

Ist aber $B < 0$, dann setzen wir an Stelle

$$\begin{array}{lll} \text{von} & \bar{a} & \bar{a} \\ & \bar{b} & \bar{a} + \bar{b} \\ & \bar{c} & \bar{a} + 2\bar{b} + \bar{c} \text{ (vgl. } (N) \text{ § 18),} \end{array} \tag{5}$$

und kommen so auf eine neue Form, die wir ganz in derselben Weise behandeln, wie wir es eben mit $(a\,b\,c)$ getan haben. Dies muss solange wiederholt werden, bis endlich der Fall eintritt $B \geqq 0$.

Sei $(A\,B\,C)$ diejenige reduzierte Form, auf die wir bei dem oben besprochenen Verfahren schliesslich geführt werden (deren Koeffizienten also auch den Ungleichungen (1) genügen), dann hat die reduzierende Substitution R, die die gegebene Form in $(A\,B\,C)$ überführt, der Hauptsache nach dieselbe Gestalt wie R in (4) § 14; nur hat man die Bemerkung am Schluss von § 15 zu berücksichtigen. Die nämliche Erörterung, die wir in § 14 an die Determinante $|R|$ anknüpften, gilt auch hier.

Ist $|R| = \pm 1$, so ist $(A\,B\,C)$ eine zur ursprünglich gegebenen Form aequivalente reduzierte Form, im Sinne der Picardschen Gruppe Γ.

Ist aber $|R| = \pm i$, so ist erst $(A\,B\,C)U_1$ zur Ausgangsform aequivalent durch die Gruppe Γ.

Zur Erläuterung der nachstehenden Tabelle, in welcher die Reduktion der Form

$$(215 + 312 \cdot i)u^2 + 2(-159 + 501 \cdot i)u \cdot v + (-684 + 252 \cdot i)v^2$$

durchgeführt ist, sei noch folgendes bemerkt. Unter der Rubrik U sind diejenigen U-Substitutionen verzeichnet, die die links stehende Form in die oben $(a\,\bar{b}\,\bar{c})$ bezeichnete Form überführen, deren Koeffizienten den Ungleichungen (1) genügen. Das Übrige ist aus der vorangehenden Diskussion verständlich.

B e i s p i e l.

$$\text{Form } (215 + 312 \cdot i,\ -159 + 501 \cdot i,\ -684 + 252 \cdot i).$$

$$D = -36 - 90 \cdot i; \quad \sqrt{DD_0} = 96 + \theta,\ \text{wo } 0 < \theta < 1.$$

a	b	c	aa_0	cc_0	$f = -(ab_0 + bc_0)$	U	bb_0	$B = \sqrt{DD_0} + \bar{a}\bar{a_0} + \bar{b}\bar{b_0} - 2R(\bar{f})$
$215 + 312 \cdot i$	$-159 + 501 \cdot i$	$-684 + 252 \cdot i$	143569	531360	$-357135 + 459939 \cdot i$	U_1^3	276282	-499931
$215 + 312 \cdot i$	$-286 + 153 \cdot i$	$-103 - 258 \cdot i$	143569	77173	$23770 + 211674 \cdot i$	U_2U_1	105205	-240874
$-103 - 258 \cdot i$	$50 + 28 \cdot i$	$-12 + 2 \cdot i$	77173	148	$12918 + 10452 \cdot i$	U_2	3284	-22308
$-12 + 2 \cdot i$	$38 + 30 \cdot i$	$-15 - 200 \cdot i$	148	40225	$6966 - 7586 \cdot i$	U_1	2344	-12584
$-12 + 2 \cdot i$	$18 - 36 \cdot i$	$63 + 126 \cdot i$	148	19845	$3690 + 4934 \cdot i$	U_1^3	1620	-8000
$-12 + 2 \cdot i$	$24 + 20 \cdot i$	$-3 - 88 \cdot i$	148	7753	$2080 - 2340 \cdot i$	U_1	976	-3460
$-12 + 2 \cdot i$	$8 - 22 \cdot i$	$31 + 42 \cdot i$	148	2725	$816 + 1266 \cdot i$	U_1^3	548	-1740
$-12 + 2 \cdot i$	$10 + 10 \cdot i$	$1 - 24 \cdot i$	148	577	$330 - 390 \cdot i$	U_1	200	-336
$-12 + 2 \cdot i$	$-2 - 8 \cdot i$	$7 + 6 \cdot i$	148	85	$54 + 144 \cdot i$	U_2U_1	68	-39
$7 + 6 \cdot i$	$-1 + 8 \cdot i$	$3 + 8 \cdot i$	85	73	$-102 + 30 \cdot i$	$U_2U_1^2$	65	$+30$

$$\text{Reduzierte Form } (3 + 8 \cdot i,\ 1 - 8 \cdot i,\ 7 + 6 \cdot i).$$

$$R = U_1^3 N U_2 U_1 N U_2 \dots N U_2 U_1^2 = \begin{pmatrix} -1 - 8 \cdot i & 7 \cdot i \\ 5 + 3 \cdot i & -4 - 3 \cdot i \end{pmatrix}.$$

Es sei hier noch folgende Tabelle angegeben, deren wir zur Aufstellung der reduzierenden Transformation R bedürfen.

$$\begin{aligned} N &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & U_2 &= \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ U_1 &= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & U_2U_1 &= \begin{pmatrix} 0 & i \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ U_1^2 &= \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} & U_2U_1^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ U_1^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} & U_2U_1^3 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ i & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{5}$$

(hergeleitet aus (2) § 8).

Für unser Beispiel ist nun

$$R = U_1^3 N U_2 U_1 N U_2 N U_1 N U_1^3 N U_1 N U_1^3 N U_1 N U_2 U_1 N U_2 U_1^2 = \begin{pmatrix} -1 - 8i & 7i \\ 5 + 3i & -4 - 3i \end{pmatrix}$$

und man findet

$$|R| = 1,$$

wie auch aus dem Umstande folgt, dass die Summe der Exponenten von U_1 gleich 12 ist.

Es ist daher die Form

$$(3 + 8i,\, 1 - 8i,\, 7 + 6i)$$

eine zur Ausgangsform aequivalente reduzierte Form, im Sinne der Gruppe Γ.

§ 20.
Die Kette der reduzierten Formen.

Wir fassen nun die Gesamtheit aller derjenigen Oktaeder T ins Auge, die wenigstens einen Punkt mit der repräsentierenden Sehne der Form $(a\,b\,c)$ gemein haben.

Sind ζ_1 und ζ_2 die Endpunkte der Sehne, und denken wir uns dieselbe in bestimmtem Sinne, etwa von ζ_1 nach ζ_2 durchlaufen, so werden wir dabei auf eine unendliche Reihe von Punkten

$$\dots P_{-2},\, P_{-1},\, P_0,\, P_1,\, P_2,\, \dots \tag{1}$$

geführt, die die Eigenschaft besitzen, dass in jedem derselben die Sehne $(a\,b\,c)$ aus einem Oktaeder heraus in ein neues übertritt. In der Reihe (1) ist offenbar die Succession der Glieder eine eindeutig bestimmte, währenddem die Wahl des Null-Index der Natur nach willkürlich bleibt.

Betrachten wir ein beliebiges Segment der Sehne $(a\,b\,c)$, das zwischen zwei konsekutiven Punkten P_κ und $P_{\kappa+1}$ der Reihe (1) liegt. Im allgemeinen wird dasselbe dem Innern eines der Oktaeder T angehören. Es sei

$$\dots T_{i_{-2}},\, T_{i_{-1}},\, T_{i_0},\, T_{i_1},\, T_{i_2},\, \dots \tag{2}$$

die Gesamtheit dieser Oktaeder; und zwar in derjenigen Reihenfolge aufnotiert, die der Reihe (1) korrespondiert. Wir wollen diese (2) Reihe von Oktaedern die Basisreihe heissen, inbezug auf die später folgende Reihe (3).

Es gilt der

1. Satz: „Die Basisreihe der Oktaeder ist hinsichtlich der Rangordnung der Glieder für jede gegebene Form $(a\,b\,c)$ eindeutig bestimmt. Dagegen ist die Wahl des Index i_0 willkürlich; wir wollen deshalb zwei solche Reihen (2), von denen die eine durch blosse Verschiebung der Indices aus der andern hervorgeht, als identisch ansehen.“

Es kann aber das Segment $P_\kappa P_{\kappa+1}$ der Sehne $(a\,b\,c)$ auch in eine Seitenfläche eines Oktaeders T hineinfallen. Dieses Segment gehört dann nicht nur diesem einen Oktaeder T an, sondern mehreren. Wie aus Satz 3 § 9 und der Diskussion in § 10 folgt, gehört dasselbe aber jedenfalls nur endlich vielen Oktaedern an. Es ist daher möglich, dieselben in eine zuerst zwar willkürliche Reihenfolge anzuordnen, die wir aber dann ein für allemal beibehalten wollen. In dieser festen Anordnung denken wir sie eingeschoben zwischen diejenigen beiden Glieder der Basisreihe (2), die die Segmente $P_{\kappa-1}P_\kappa$ und $P_{\kappa+1}P_{\kappa+2}$ enthalten. Und das denken wir uns getan für alle Segmente $P_\kappa P_{\kappa+1}$, die die eben besprochene Eigenschaft besitzen. Die so erhaltene neue Reihe von Oktaedern wollen wir für den Augenblick erweiterte Basisreihe heissen.

Endlich fassen wir noch einen beliebigen Punkt P_κ der Reihe (1) ins Auge. Sei T dasjenige Oktaeder, das mit der Sehne $(a\,b\,c)$ die Strecke $P_{\kappa-1}P_\kappa$ gemein hat, bezw. wenn es deren mehrere gibt, das letzte in der erweiterten Basisreihe; und es sei ferner T' dasjenige, das mit der Sehne $(a\,b\,c)$ das Stück $P_\kappa P_{\kappa+1}$ gemeinschaftlich besitzt, oder gegebenen Falls, das erste solche in der erweiterten Basisreihe. Es kann nun sein, dass es auch noch solche Oktaeder gibt, die nur gerade den Punkt P_κ mit der Sehne $(a\,b\,c)$ gemein haben; jedenfalls aber gibt es (nach schon oben zitiertem Satz) solcher nur

endlich viele. Es ist daher auch in diesem Falle möglich, dieselben in eine willkürliche, aber feste Reihe einzufügen und dieselbe zwischen T und T' in die erweiterte Basisreihe einzuschieben. Das denken wir uns wiederum für alle Punkte der Reihe (1), die die eben diskutierte charakteristische Eigenschaft besitzen, getan. Auf diese Weise lässt sich die Gesamtheit aller Oktaeder T, die mit der Sehne $(a\,b\,c)$ wenigstens einen Punkt gemein haben, in eine Reihe anordnen.

$$\dots T_{-2},\, T_{-1},\, T,\, T_1,\, T_2 \dots \tag{3}$$

sei diese Reihe, wir wollen sie bezeichnen als eine zur gegebenen Form $(a\,b\,c)$ gehörende Kette von Oktaedern und die Reihe (2) heisse die zur Reihe (3) gehörende Basisreihe.

Man erkennt so die Richtigkeit des folgenden Satzes.

2. Satz: „Die zu einer Form $(a\,b\,c)$ gehörende Kette (3) von Oktaedern besitzt die Eigenschaft, dass es in ihr eine Succession von Gliedern gibt, nämlich die Kette (2), die eindeutig bestimmt ist. Zwischen die Glieder dieser engern Reihe hinein drängen sich die noch übrigen Elemente der Kette (3) so, dass zwischen je zwei Glieder der ersteren nur ganz bestimmte Elemente eintreten, deren Rangordnung jedoch gewissen Willkürlichkeiten unterworfen bleibt.“

Wir wollen diesen Satz noch durch die folgende Bestimmung ergänzen.

3. Satz: „Zwei Ketten (3) von Oktaedern, die zu ein und derselben Form gehören, die daher dieselbe Basiskette (2) besitzen und die sich nur dadurch unterscheiden, dass die zwischen die Glieder dieser letztern eingeschobenen Elemente gegeneinander permutiert sind, wollen wir als nicht wesentlich von einander verschieden ansehen, und zwar auch dann nicht, wenn die Indices der Glieder der einen Reihe um eine konstante ganze Zahl von denjenigen der korrespondierenden Glieder der andern Reihe differieren.“

Nach diesen Festsetzungen übersieht man nun, dass die einer gegebenen Form $(a\,b\,c)$ angehörende Kette von Oktaedern (3) eindeutig bestimmt ist.

Jedem Oktaeder T_i der Reihe (3) entspricht nun eine Substitution S, die T_i in das Fundamentaloktaeder T_0 überführt. (Eigentlich sind es deren vier; nämlich alle Substitutionen US, wo U jede Transformation der Gruppe (U) bedeuten kann; wir wollen solche vier Transformationen als eine einzige ansehen.)

Sei nun

$$\dots S'_{-2},\, S'_{-1},\, S'_0,\, S'_1,\, S'_2,\, \dots$$

die der Reihe (3) entsprechende Reihe von Substitutionen, so dass $S'_i\, T_i$ in T_0 überführt. Zufolge des Satzes § 15 transformieren die zu den obenstehenden inversen Transformationen die gegebene Form je in eine aequivalente reduzierte Form. Es sei

$$\dots S_{-2},\, S_{-1},\, S_0,\, S_1,\, S_2,\, \dots \tag{4}$$

die Reihe dieser Substitutionen und zwar so, dass $S_i = (S'_i)^{-1}$ ist für jeden Index i. Ferner sei

$$\dots \varphi_{-2},\, \varphi_{-1},\, \varphi_0,\, \varphi_1,\, \varphi_2,\, \dots \tag{5}$$

die Kette der reduzierten Formen und zwar soll für jeden Index i $\varphi_i = (a\,b\,c)S_i$ sein.

D e f i n i t i o n. Die Formenreihe (5) wollen wir die zu der gegebenen Form $(a\,b\,c)$ gehörende Kette von reduzierten Formen heissen. Sie ist eindeutig bestimmt, wenn man dieselben Willkürlichkeiten, die der Reihe (3) anhaften, auf sie übernimmt.

Es soll nun die Richtigkeit des folgenden Satzes bewiesen werden.[1])

4. Satz: „Zwei Dirichletsche Formen f und f' sind stets und nur dann aequivalent, wenn zu der einen Form dieselbe Kette von reduzierten Formen gehört, wie zu der andern Form.“

Gehe f über durch die Substitution S in die Form f', also dass

$$f' = fS \tag{6}$$

ist, und seien ferner (3), (4) und (5) die zu der Form f,

$$\dots T'_{-2},\ T'_{-1},\ T',\ T'_1,\ T'_2, \dots \tag{7}$$

$$\dots S'_{-2},\ S'_{-1},\ S'_0,\ S'_1,\ S'_2, \dots \tag{8}$$

und

$$\dots \varphi'_{-2},\ \varphi'_{-1},\ \varphi'_0,\ \varphi'_1,\ \varphi'_2, \dots \tag{9}$$

die zu der Form f' gehörenden Ketten von Oktaedern, reduzierenden Substitutionen und reduzierten Formen. Nun geht durch die Transformation S^{-1} die Sehne der Form f über in diejenige der Form f' und damit zugleich die Reihe (3) in die Reihe (7). Nehmen wir an, dass etwa T nach T'_n übergeführt werde, die Reihe (7) kann dann so vorausgesetzt werden, dass auch T_1 in T'_{n+1}, T_2 in T'_{n+2} u. s. w., allgemein

$$T_i \text{ in } T'_{n+i} \text{ für jedes } i$$

übergeht; wir wollen fernerhin an dieser letzten Voraussetzung festhalten. Die Transformation $S_1^{-1}S$ führt das Oktaeder T'_{n+i} über in das Fundamentaloktaeder T_0, man schliesst daraus, dass

$$\begin{gathered}(S'_{n+i})^{-1} = S_i^{-1}S, \text{ also } S'_{n+i} = S^{-1}S_i \\ \text{und ferner } S = S_i(S'_{n+i})^{-1}\end{gathered} \tag{10}$$

sein wird. Da durch die Substitution $S'_{n+i}f'$ übergeht in φ'_{n+i}, so folgt (aus (5), (6) und (10))

$$\begin{gathered}\varphi'_{n+i} = f'S'_{n+i} = f'S^{-1}S_i = fS_i = \varphi_i \\ \text{für jeden Index } i\end{gathered}$$

woraus der Satz abgeleitet wird.

---

[1]) Die hier folgende Diskussion, wie auch diejenige in § 21, ist entnommen aus der in § 1 zitierten Abhandlung von Herrn Hurwitz. Vgl. daselbst §§ 7 und 8.

5. Satz: „Geht die Form f durch die Transformation S in die Form f' über und sind (5) und (9) die zu f und f' gehörenden Ketten von reduzierten Formen, sowie (4) und (8) die beiden korrespondierenden Reihen von reduzierenden Substitutionen, so ist für jeden Index i

$$\varphi'_{n+i} = \varphi_i \text{ und } S = S_i(S'_{n+i})^{-1},$$

wo n eine feste ganze Zahl bedeutet."

Die Zahl n ist nach Festlegung der Nullindices in den Reihen (4) und (8) eindeutig bestimmt, wie man aus dem folgenden Ansatz sofort erkennt

$$S = S_i(S'_{n+i})^{-1} = S_i(S'_{m+i})^{-1}.$$

Hieraus folgt nämlich

$$S'_{n+i} = S'_{m+i},$$

und da die Oktaeder einer Kette jedenfalls alle von einander verschieden sind und mit ihnen auch die bezüglichen Transformationen, so kann die obige Gleichung nur bestehen, wenn $n = m$ ist.

Seien nun f und f' zwei Dirichletsche Formen, (5) die Kette der zu f, (9) diejenige der zu f' aequivalenten reduzierten Formen und besitzen f und f' die Eigenschaft, dass die Ketten (5) und (9) irgend ein Glied gemein haben, etwa

$$\varphi_0 = \varphi'_n$$

so folgt aus

$$fS_0 = \varphi_0, \quad f'S'_n = \varphi'_n$$
$$fS_0 = f'S'_n,$$

daher ist

$$S = S_0(S'_n)^{-1}$$

eine Transformation, die f in f' übergehen lässt. f und f' sind daher einander aequivalent und aus Satz 5 ergibt sich

6. Satz: „Wenn die zu zwei Formen f und f' gehörenden Ketten (5) und (9) von reduzierten Formen irgend ein Glied gemein haben, z. B. $\varphi'_n = \varphi_0$, so geht die Form f durch die Substitution $S = S_0(S'_n)^{-1}$ in die Form f' über und es ist dann für jeden Index i

$$\varphi_i = \varphi'_{n+i}; \quad S = S_i(S'_{n+i})^{-1}$$

erfüllt."

Satz 4 ist Schlussfolgerung aus den Sätzen 5 und 6.

§ 21.
Transformation einer Dirichletschen Form in sich.

Die Sätze 5 und 6 aus dem vorangehenden Paragraphen wollen wir nun anwenden auf den Fall, dass die Form f' mit der Form f identisch ist. Die Reihen (4) und (8) und ebenso (5) und (9) in § 20 stimmen dann mit einander überein, und es bedeutet S eine von der identischen verschiedene Transformation, die die Form in sich selber überführt. Wir finden daraus das folgende Verfahren zur Bestimmung derjenigen Transformationen, die eine gegebene Form in sich selber übergehen lassen.

Sei φ_0 eine bestimmte Form der Reihe (5), es muss dann in derselben Reihe noch weitere Formen geben, die mit φ_0 identisch sind. Ist φ_n eine solche Form, so wird $S = S_0 S_n^{-1}$ eine der gesuchten Transformationen, und es ist dann auch für jeden Index i S_{n+i} identisch mit S_i. Bedeutet $|n|$ den numerischen Wert von n, dann wird die Kette (5) nichts anderes als die periodische Wiederholung der $|n|$-gliedrigen Reihe

$$\varphi_0,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \dots,\ \varphi_{|n|}.$$

Man folgert hieraus

1. Satz: „Die Form f besitzt dann und nur dann von der identischen verschiedene Transformationen in sich, wenn in der zu f gehörenden Kette von reduzierten Formen ein und dieselbe Form wiederholt auftritt. Ist dann in der Reihe $\varphi_0,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \dots,\ \varphi_m,\ \varphi_{m+1},\ \dots\ \varphi_m$ die erste Form, die mit φ_0 sich deckt, dann besteht die betreffende Kette aus der periodischen Wiederholung der m-Formen

$$\varphi_0,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \dots,\ \varphi_{m-1}.$$

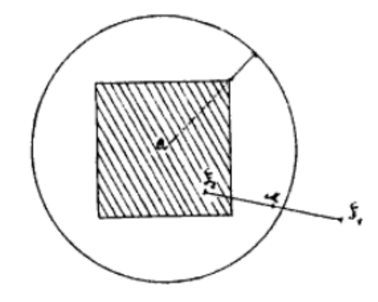
Die Transformation $S = S_0 S_m^{-1}$ führt die Form in sich über, und jede andere Transformation, die dasselbe leistet, ist eine Potenz von S.“

Zum Schlusse wollen wir noch zeigen, dass es wirklich solche Transformationen einer Dirichletschen Form $(a\,b\,c)$ in sich geben muss, wenn die Koeffizienten derselben ganze komplexe Zahlen sind.

Ist $(a\,b\,c)$ eine solche Form und sind ζ_1 und ζ_2 die Wurzeln der Gleichung

$$a\zeta^2 + 2b\zeta + c = 0,$$

also zugleich auch die Endpunkte der Sehne $(a\,b\,c)$, so kann man mit Hülfe der Transformationen U immer erreichen, dass wenigstens einer der Punkte ζ_1 und ζ_2 auf der obern Hälfte der Kugel $\mathfrak{K}$ liegt. Zu jeder reduzierten Form gibt es eine aequivalente reduzierte Form, die dieser Forderung genügt; nehmen wir an, dass $(a\,b\,c)$ selber diese Bedingung erfülle. Wir denken uns jetzt die bezügliche Sehne projiziert vom Punkte ∞ aus auf die $\xi\,\eta$-Ebene des ursprünglichen Koordinatensystems. Wir betrachten nun diese Projektion. Der eine der beiden Endpunkte ζ_1 und ζ_2 der projizierten Sehne liegt nach Voraussetzung ausserhalb des Kreises $\xi^2 + \eta^2 = 1$. Soll die Form $(a\,b\,c)$ eine reduzierte sein, so muss die geradlinige Strecke $(\zeta_1 \zeta_2)$ wenigstens einen Punkt gemein haben mit der Projektion des Fundamentaloktaeders T_0



vom Punkte ∞ aus auf die $\xi\,\eta$-Ebene, d. h. mit dem in obenstehender Figur schraffierten Quadrat. Bezeichnet nun s die gewöhnliche Entfernung (ζ_1, ζ_2) und ebenso t die gewöhnliche Entfernung (O, M), wo O Anfangspunkt ist des Koordinatensystems $\xi\,\eta$, und wo M denjenigen Punkt der Sehne $(\zeta_1\zeta_2)$ andeuten soll, der in der Mitte zwischen jenen beiden Punkten liegt, dann erkennt man die folgenden notwendigen Bedingungen dafür, dass die Form $(a\,b\,c)$ eine reduzierte ist; es muss

$$(a)\quad s > 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad (b)\quad \frac{s}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} > t$$

sein. Die ξ- und η-Koordinaten der Punkte ζ_1, ζ_2 und M sind nun die folgenden:

$$\begin{aligned}
\zeta_1: \quad & \frac{1}{2}(\zeta_1 + \zeta_{1_0}) = \frac{-(ab_0 + a_0 b) + (a\sqrt{D_0} + a_0\sqrt{D})}{2aa_0}, \\
& \frac{1}{2i}(\zeta_1 - \zeta_{1_0}) = \frac{-i(ab_0 - a_0 b) + i(a\sqrt{D_0} - a_0\sqrt{D})}{2aa_0}; \\
\zeta_2: \quad & \frac{1}{2}(\zeta_2 + \zeta_{2_0}) = \frac{-(ab_0 + a_0 b) - (a\sqrt{D_0} + a_0\sqrt{D})}{2aa_0}, \\
& \frac{1}{2i}(\zeta_2 - \zeta_{2_0}) = \frac{-i(ab_0 - a_0 b) - i(a\sqrt{D_0} - a_0\sqrt{D})}{2aa_0};
\end{aligned}$$

$$M: \quad \frac{-(ab_0 + a_0 b)}{2aa_0}; \quad \frac{-i(ab_0 - a_0 b)}{2aa_0}.$$

Hieraus findet man

$$s^2 = \Big(\frac{a\sqrt{D_0} + a_0\sqrt{D}}{aa_0}\Big)^2 + \Big(i\frac{a\sqrt{D_0} - a_0\sqrt{D}}{aa_0}\Big)^2 = 4\frac{\sqrt{DD_0}}{aa_0}$$

$$t^2 = \Big(\frac{ab_0 + a_0 b}{2aa_0}\Big)^2 + \Big(i\frac{ab_0 - a_0 b}{2aa_0}\Big)^2 = \frac{bb_0}{aa_0}.$$

Indem man diese Werte in (a) und (b) substituiert und wenig umrechnet, findet man die folgenden Ungleichungen, denen die Koeffizienten a, b, c einer reduzierten Form notwendig zu genügen haben,

$$(a')\quad \sqrt{aa_0} < \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}\sqrt[4]{DD_0}$$

$$(b')\quad \sqrt{bb_0} < \sqrt{\frac{aa_0}{2}} + \sqrt[4]{DD_0}.\,[1])$$

Da nun aa_0 und bb_0 positive ganze rationale Zahlen sind und da DD_0 eine positive Konstante ist, so folgt aus der ersten Ungleichung, dass es nur endlich viele Werte von a geben kann, und auf Grund dieses Umstandes folgt dann weiter aus der Ungleichung (b'), dass es auch nur eine endliche Anzahl von Lösungen gibt für den Koeffizienten b. Da endlich zu jeder Annahme von a und b der Koeffizient c schon bestimmt ist, so gibt es (bei gegebener Diskriminante D) nur eine endliche Zahl von Systemen $(a\,b\,c)$, die die Ungleichungen (a) und (b) befriedigen, und mithin gibt es auch nur endlich viele reduzierte Formen, was wir zu zeigen beabsichtigt haben.

[1]) Die Ungleichungen (a) und (b) decken sich im wesentlichen mit denjenigen, die Fricke und Klein aufgestellt haben; vgl. Aut. I, p. 460 u. 461.

§ 22.
Das Oktaeder O.

Wir wollen in diesem Paragraphen dasjenige Oktaeder betrachten, das bestimmt ist durch die Punkte $(\infty, 0, 1, i, -1, -i)$ der Kugel $\mathfrak{K}$, als Ecken desselben; wir wollen es kurz O benennen. Es soll gezeigt werden, dass dasselbe in engem Zusammenhange steht mit dem Fundamentaloktaeder T_0; sodann soll die Gesamtheit derjenigen Transformationen der Gruppe Γ aufgesucht werden, die die Eigenschaft besitzen, einen Punkt P von O in einen andern Punkt P', der auch O angehört, überzuführen; und endlich soll noch nachgewiesen werden, dass die Punkte von O durch eine ähnliche Invariantenbedingung charakterisiert sind, wie die Punkte von T_0.

Seien $(a\,b_1\,b_2\,c)$ die homogenen Koordinaten eines Punktes P. An Hand der Formeln (1) und (2) und der Bemerkung 1 § 2 findet man die folgenden Bedingungen dafür, dass der Punkt P dem Innern, bezw. der Begrenzung von O angehört. Es muss

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 - c &\leqq 0 & b_1 + b_2 - a &\leqq 0 \\ -b_1 + b_2 - c &\leqq 0 & -b_1 + b_2 - a &\leqq 0 \\ -b_1 - b_2 - c &\leqq 0 & -b_1 + b_2 - a &\leqq 0 \\ b_1 - b_2 - c &\leqq 0 & b_1 + b_2 - a &\leqq 0 \end{aligned} \tag{1}$$

sein. — Durch die Ungleichungen

$$b_1 + b_2 \geqq 0;\ \ b_1 - b_2 \geqq 0;\ \ a - 2b_1 \geqq 0;\ \ c - 2b_1 \geqq 0 \tag{2}$$

ist ein gewisses Tetraeder, wir wollen es mit Δ_0 bezeichnen, charakterisiert. Es ist dasselbe dasjenige Viertel des Fundamentaloktaeders T_0, das von den durch σ_0 hindurchgehenden Diagonalebenen desselben herausgeschnitten wird und das dem Punkte 1 der Kugel zugewendet liegt.

Δ_0 geht bei der Transformation U_2 in sich über (vgl. (4) § 8), bei der Transformation $U_1^{(r)}$ $(r = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$ geht Δ_0 in ein neues Tetraeder Δ_r über, so dass die vier Tetraeder $\Delta_0\,\Delta_1\,\Delta_2\,\Delta_3$ zusammen das Oktaeder T_0 einfach und lückenlos ausfüllen.

Wir wollen nun unter Δ' dasjenige Tetraeder verstehen, das entsteht, wenn wir Δ_0 der Transformation

$$N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

unterwerfen. Sind $(a'\,b_1'\,b_2'\,c')$ die Koordinaten des aus $(a\,b_1\,b_2\,c)$ durch die Substitution N entspringenden Punktes, so berechnet man mit Hülfe von (3) § 6

$$\begin{aligned} \alpha)\quad a' &= a - 2b_1 + c \quad \text{oder} \quad & \beta)\quad a &= a' + 2b_1' + c' \\ b_1' &= b_1 - c & b_1 &= b_1' + c' \\ b_2' &= b_2 & b_2 &= b_2' \\ c' &= c & c &= c', \end{aligned} \tag{3}$$

und es werden daher die Bedingungen, denen die Punkte von Δ' zu genügen haben, die Folgenden (indem man die Ausdrücke (3 β) in (2) substituiert und die Akzente weglässt):

$$\begin{aligned} -b_1 - b_2 - c &\leqq 0 & c - a &\leqq 0 \\ -b_1 + b_2 - c &\leqq 0 & 2b_1 + c &\leqq 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Indem man die aus (4) sich ergebenden Begrenzungsebenen von Δ' näher betrachtet und mit (1) vergleicht, erkennt man die Richtigkeit der folgenden Behauptung.

Das Tetraeder Δ' fällt in seiner ganzen Ausdehnung zusammen mit demjenigen Tetraeder, das bestimmt ist durch den Kugelpunkt (-1) als Ecke und derjenigen Seitenfläche von T_0 die in der Ebene $c+2b_1=0$ liegt als gegenüberliegende Seite. Es bildet dasselbe ein Stück der Ergänzung des Oktaeders T_0 zum Oktaeder O. — Durch die Transformation U geht Δ' über in aequivalente Tetraeder Δ'', Δ''', … die sich an die andern Seitenflächen von T_0 anlegen und von denen je eine Ecke in einen der vier Punkte $(\pm 1, \pm i)$ der Kugel hineinfällt. Bestimmt man analog wie für Δ' die Begrenzungsebenen für Δ'', Δ''' …, so sieht man schliesslich die Richtigkeit des folgenden Satzes ein.

„Die Tetraeder Δ', Δ'', … zusammen mit Δ_0 bis Δ_3 erfüllen das Oktaeder O einfach und lückenlos.“

Aus den vorausgehenden Darlegungen erkennt man ferner: Ist P ein Punkt von O, so können wir zu ihm immer wenigstens einen, im allgemeinen zwei aequivalente Punkte P_0 und P_0' finden, die Δ_0 angehören.

Man überzeugt sich durch einfache Rechnung, dass die Transformationen der Gruppe $(\bar{U})$ O in sich überführen.

Es soll nun die Gesamtheit (V) derjenigen Transformationen V der Gruppe (Γ) bestimmt werden, die einen Punkt P von O in einen neuen Punkt P' von O überführen und die nicht zugleich in der Gruppe (U) vorkommen.

Bedeuten U und U' zwei beliebige Transformationen der Gruppe $(\bar{U})$, dann kann man jeder der gesuchten Substitutionen V die Gestalt geben

$$V = UNU' \tag{5}$$

(N, vgl. oben). In der Tat sei S eine beliebige Transformation, die den Punkt P in den Punkt P' überführt, die beide O angehören, so ist also

$$P' = SP.$$

Da P und P' einander aequivalent sind, so gibt es in Δ_0 einen Punkt P_0, der beiden zugleich entspricht. Nach den Erörterungen im ersten Abschnitt dieses Paragraphen muss es zwei Substitutionen V_1 und V_2 geben, so dass

$$P = V_1 P_0, \qquad P' = V_2 P_0$$

ist und zwar nehmen dieselben die Form an

$$V_1 = UN^r \qquad V_2 = U'N^s$$

wo r und s gleich 0 oder 1 sind.

Nun muss also

$$U'N^s = SUN^r$$

sein, woraus

$$S = U'N^{s-r}U^{-1}$$

folgt. Hier kann $s-r$ die Werte annehmen 1, 0 und -1; bemerken wir noch, dass

$$N^{-1} = U_1^2 N U_1^{-2}$$

ist, wie durch elementare Rechnung sofort verifiziert werden kann, so übersieht man, dass die rechte Seite der obigen Gleichung für S tatsächlich immer die Gestalt (5) annimmt, sofern sie nicht bloss eine Substitution der Gruppe $(\bar{U})$ wird, was wir zeigen wollten.

Sei

$$\begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 \\ \delta_3 & \delta_4 \end{pmatrix} \tag{6}$$

das Koeffizientensystem der Substitution V, es soll noch untersucht werden, wie die $\delta_1 \dots \delta_4$ beschaffen sind.

Bezeichnen wir mit ϵ, ϵ' und ebenso mit η und η' je irgend eine der Zahlen ± 1, $\pm i$, dann nehmen bekanntlich die Substitutionen U die Formen an

$$\begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} 0 & \eta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und ferner ist, nach Annahme

$$N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Gemäss (5) erhält daher V eine der folgenden vier Gestalten

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \epsilon\epsilon' & \epsilon' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \eta' \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\epsilon & \epsilon\eta' \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0 & \eta \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & \eta \\ \epsilon' & -1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0 & \eta \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \eta' \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \eta & 0 \\ -1 & \eta' \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{7}$$

aus denen man ersieht, dass das System (6) den folgenden Bedingungen Genüge leistet

$$\begin{aligned} |\delta_i| &= 1 \text{ für drei der Indices } i \\ \delta_i &= 0 \text{ für den vierten Index.} \end{aligned} \tag{8}$$

Diejenigen unter den Substitutionen V für die $\delta_1\delta_4 - \delta_2\delta_3 = \pm 1$ ist, gehören der Picardschen Gruppe Γ an, es sind das im wesentlichen die folgenden acht

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

Zum Schlusse soll noch die Invariantenbeziehung aufgestellt werden, die die Punkte von O charakterisiert.

Acht der Kanten von O, nämlich diejenigen, die von den Ecken 0 und ∞ ausgehen, sind Elementarsehnen. Wir wollen dieselben, analog wie die ihnen zugehörenden Oktaeder, N a c h b a r s e h n e n von σ_0 nennen.

Die Invariantenbedingung drückt sich dann in folgendem Satze aus:

„Ist der Punkt $P(a\, b_1\, b_2\, c)$ ein Punkt im Innern von O, so ist seine Entfernung von der Fundamentalsehne σ_0 kleiner oder doch nicht grösser als seine Entfernung von jeder beliebigen andern Elementarsehne, ausgenommen einer Nachbarsehne von σ_0.“

Der Beweis ist der: Setzen wir wie in (2) § 10

$$b = \epsilon|b_1| + i\eta|b_2|; \quad a = A + |b_1| + |b_2| \quad \text{und} \quad c = C + |b_1| + |b_2|,$$

so folgt aus (1), ist P ein Punkt von O, so ist

$$A \text{ und } C \geqq 0.$$

Es soll $a(\lambda\,\mu)$ die Abkürzung sein für den folgenden Ausdruck

$$A\mu\mu_0 + C\lambda\lambda_0 + |b_1|(\mu - \epsilon\lambda)(\mu_0 - \epsilon\lambda_0) + |b_2|(\mu + i\eta\lambda)(\mu_0 - i\eta\lambda_0);$$

bedeuten ferner a^* und A^* die grössere der beiden Zahlen a und c bezw. A und C, so folgt aus Satz 4, § 9:

Damit der Punkt $(a\, b_1\, b_2\, c)$ von der Sehne σ_0 eine kleinere oder doch nicht grössere Entfernung hat als von jeder andern Elementarsehne σ, muss

$$\bar{a}(\gamma\,\mu) \geqq a^*$$

oder also

$$A\mu\mu_0 + C\lambda\lambda_0 + |b_1|(\mu - \epsilon\lambda)(\mu_0 - \epsilon\lambda_0) + |b_2|(\mu + i\eta\lambda)(\mu_0 - i\eta\lambda_0) \geqq A^* + |b_1| + |b_2| \quad (9)$$

sein, für beliebige ganze komplexe Zahlen λ, μ ohne gemeinschaftlichen Teiler, von denen diejenige nicht gleich Null sein darf, die als Koeffizient von A^* auf der linken Seite auftritt.

Die Ungleichung (9) ist beständig erfüllt, wenn keiner der Koeffizienten

$$\mu, \;\lambda, \;\mu - \epsilon\lambda, \;\mu + i\eta\lambda$$

verschwindet. Wird jedoch einer der Koeffizienten gleich Null, so kann in der Tat der Fall eintreten, dass (9) nicht mehr erfüllt ist, und zwar handelt es sich dabei nur um einen der Koeffizienten

$$\mu - \epsilon\lambda, \;\mu + i\eta\lambda.$$

Beide Fälle führen auf einen der Punkte ± 1, $\pm i$, d. h. in letzter Linie auf eine Nachbarsehne von σ_0.

III. Die Picardsche Gruppe aus dem Zahlkörper der dritten Einheitswurzel.

§ 23.
Aufstellung der Picardschen Gruppe Γ_1.

Wir betrachten im dritten Abschnitt der vorliegenden Arbeit die Gesamtheit derjenigen linearen Transformationen

$$u' = \frac{\alpha u + \beta}{\gamma u + \delta}, \tag{1}$$

die die Eigenschaft haben, dass ihre Koeffizienten α, β, γ, δ ganze Zahlen sind von der Form $u + \varrho \cdot v$, wo ϱ eine imaginäre dritte Einheitswurzel bedeutet und die ausserdem der Bedingung genügen

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1. \tag{2}$$

Der Terminologie von Fricke folgend, wollen wir die Gesamtheit derselben die Picardsche Gruppe aus dem Zahlkörper der dritten Einheitswurzel nennen und sie mit Γ_1 bezeichnen. [1])

Es handelt sich nun darum, an die Gruppe Γ_1 dieselben Betrachtungen anzuknüpfen, die wir im vorangehenden Abschnitt an die Gruppe Γ geknüpft haben. Die Untersuchungen werden jenen dort vollkommen parallel verlaufen, so dass wir grossenteils nur auf sie zu verweisen brauchen.

Es soll wiederum S die abkürzende Bezeichnung sein sowohl für das System

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

als auch für die Transformationen (1), die wir daher auch

$$u' = Su$$

schreiben können. — Da in S nur das Verhältnis $\alpha : \beta : \gamma : \delta$ wesentlich ist, so übersieht man, dass in Γ_1 auch diejenigen Transformationen enthalten sind, für welche $|S| = \varrho$ oder $= \varrho^2$ ist. Indem man nämlich in diesen Fällen $(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta)$ ersetzt durch $(\varrho \cdot \alpha, \varrho \cdot \beta, \varrho \cdot \gamma, \varrho \cdot \delta)$ bezw. $(\varrho^2 \cdot \alpha, \varrho^2 \cdot \beta, \varrho^2 \cdot \gamma, \varrho^2 \cdot \delta)$, ersieht man, dass dann $|S| = 1$, d. h. (2), erfüllt ist.

Bei gegebener Substitution S sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ bis auf ihr Vorzeichen bestimmt.

Auch hier ist es für die folgenden Untersuchungen oft von Vorteil, wenn man sich nicht ganz auf die Gruppe Γ_1 beschränkt, sondern wenn man zu diesen noch diejenigen Transformationen (1) mit ganzzahligen Koeffizienten hinzu nimmt, deren Determinante

$$|S| = \alpha\delta - \beta\gamma = -1$$

ist. — Diejenigen, für welche $|S| = -\varrho$ oder $= -\varrho^2$ ist, sind darin inbegriffen, wie man sofort erkennt. — Der leichteren Orientierung wegen wollen wir die so erweiterte Gruppe mit $\bar{\Gamma}_1$ andeuten; es ist wieder Γ_1 eine Untergruppe von $\bar{\Gamma}_1$ (analog wie in Abschnitt II die Gruppe Γ eine Untergruppe von $\bar{\Gamma}_1$ ist).

S soll in Zukunft immer eine Substitution der Gruppe Γ_1 andeuten, wogegen wir mit T eine beliebige ganzzahlige Substitution $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ bezeichnen wollen, so dass nur $|T| \neq 0$ sein soll.

Da bekanntlich die elementaren Rechnungsoperationen aus zwei Zahlen $u + \varrho v$ und $u' + \varrho v'$ aus dem Zahlkörper der dritten Einheitswurzel immer wieder eine Zahl aus demselben Körper entstehen lassen, und da ferner jede solche Zahl auch dem Körper der komplexen Zahlen angehört, so folgt, dass die Entwicklungen in § 6, insbesondere

[1]) Die in Abschnitt II besprochene Gruppe Γ nennen wir, wie allgemein gebräuchlich, kurz Picardsche Gruppe; im Titel dieser Abhandlung ist sie der grössern Deutlichkeit wegen Picardsche Gruppe aus dem Zahlkörper der vierten Einheitswurzel benannt.

das Formelsystem (3) und die daran geknüpften Erörterungen sich vollkommen auf die neue Gruppe von linearen Transformationen übernehmen.

Seien p und q zwei ganze Zahlen aus dem Zahlkörper der dritten Einheitswurzel, so wollen wir $u = \frac{p}{q}$ als rationale Zahl desselben bezeichnen. Besitzen p und q keinen gemeinschaftlichen Teiler ausser den Einheitsfaktoren, so nennen wir $\frac{p}{q}$ einen reduzierten Bruch. p und q sind bei einem solchen bestimmt bis auf eine der sechs Einheitszahlen, — wir wollen eine solche mit e bezeichnen —, so dass $u = \frac{ep}{eq}$ gesetzt werden kann.

Wenn wir fernerhin von einer rationalen Zahl $u = \frac{p}{q}$ sprechen, so soll immer $\frac{p}{q}$ als reduzierter Bruch vorausgesetzt werden.

Man erkennt auch: durch eine Substitution S (oder T) geht eine rationale Zahl u immer wieder in eine rationale Zahl u' über.

Übergehend zur Interpretation an der Kugel $\mathfrak{K}$ ordnen wir zwei rationalen Punkten $u = \frac{p}{q}$ und $v = \frac{r}{s}$ die im Innern von $\mathfrak{K}$ gelegene Verbindungssehne $\sigma = \left(\frac{p}{q}, \ \frac{r}{s}\right)$ zu und bezeichnen den Wert der Determinante $ps - qr$ als Invariante der Sehne σ. Aus den vorangehenden Erörterungen folgt, dass dieselbe nur bis auf einen Einheitsfaktor bestimmt ist, und man sieht auch, dass sie ihr Vorzeichen ändert, wenn die beiden Endpunkte der Sehne miteinander vertauscht werden.

Ist die Invariante einer Sehne eine Einheit, so wollen wir die Sehne wieder Elementarsehne heissen. Man kann die Parameter u und v der Endpunkte einer Elementarsehne immer so wählen, dass die Invariante derselben gleich 1 wird, und zwar lässt diese Wahl immer noch sechs Möglichkeiten zu.

Ist $u = \frac{p}{q}$, $v = \frac{r}{s}$ die eine derselben, so ergeben sich die andern aus dem Ansatz $u = \frac{e \cdot p}{e \cdot q}$, $v = \frac{e^{-1} \cdot r}{e^{-1} \cdot s}$.

$\sigma_0 = \left(\frac{1}{0}, \ \frac{0}{1}\right)$, ist auch hier wieder eine Elementarsehne; sie werde, wie im Falle der Gruppe Γ Fundamentalsehne genannt.

Wie in § 7 überzeugt man sich von der Richtigkeit des folgenden Satzes.

1. Satz: „Geht durch eine Substitution S (die wir der Gruppe $\bar{\Gamma}_1$ angehörend annehmen können) die Sehne $\left(\frac{p}{q}, \frac{r}{s}\right)$ über in die Sehne $\left(\frac{p'}{q'}, \frac{r'}{s'}\right)$, so haben beide Sehnen dieselbe Invariante, insbesondere geht daher eine Elementarsehne immer wieder in eine Elementarsehne über.“

Zum Schlusse dieses Paragraphen wollen wir wieder alle Substitutionen T bezw. S aufsuchen, welche die beliebig angenommene Elementarsehne $\sigma = \left(\frac{p}{q}, \frac{r}{s}\right)$ aus der Fundamentalsehne $\sigma_0 = (0, \infty)$ hervorgehen lassen. Der Weg ist vollkommen derselbe wie in § 7.

Man findet

2. Satz: „Alle Substitutionen T, welche die Sehne $(0, \infty)$ überführen in die Sehne $\left(\frac{p}{q}, \frac{r}{s}\right)$, ergeben sich durch Zusammensetzung der Transformation $\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$ mit

einer beliebigen Substitution U, die eine der beiden typischen Gestalten

$$u' = \frac{\alpha u}{\delta} \text{ und } u' = \frac{\beta}{\gamma \cdot u}$$

hat, wo α, β, γ, δ beliebige ganze Zahlen aus dem Zahlkörper der dritten Einheitswurzel sind, von denen keine gleich Null ist.“

Wir wollen nun unter den Substitutionen U diejenigen herausgreifen, die der Gruppe $\bar{\Gamma}_1$ bezw. Γ_1 angehören. Für diese ist

$$\begin{aligned} \alpha\delta &= -1 \text{ bezw. } = 1 \text{ oder} \\ -\beta\gamma &= -1 \quad\ \text{„} \quad\ = 1. \end{aligned}$$

Den sechs Einheiten

$$\pm 1, \quad \pm\varrho, \quad \pm\varrho^2$$

entsprechend erhält man die folgenden zwölf Substitutionen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \varrho^2 & 0 \\ 0 & \varrho \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \varrho & 0 \\ 0 & \varrho^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -\varrho \\ \varrho^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -\varrho^2 \\ \varrho & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\varrho^2 & 0 \\ 0 & \varrho \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\varrho & 0 \\ 0 & \varrho^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \varrho \\ \varrho^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \varrho^2 \\ \varrho & 0 \end{pmatrix},$$

die alle der Gruppe $\bar{\Gamma}_1$ angehören und von denen diejenigen der obern Zeile in Γ_1 enthalten sind.

Alle diese Substitutionen U führen die Fundamentalsehne $\sigma_0 = (0, \infty)$ in sich über und es sind dies auch die einzigen der Gruppe $\bar{\Gamma}_1$ bezw. Γ_1 zugehörenden, die dies leisten.

In analoger Weise wie in § 7 haben wir so eine Zuordnung konstruiert zwischen Elementarsehne σ und Transformation $S = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$ der Gruppe Γ_1, (bezw. $\bar{\Gamma}_1$).

Wir lassen S die eindeutig bestimmte Elementarsehne $\sigma = \left(\frac{p}{q}, \ \frac{r}{s}\right)$ entsprechen. $\frac{p}{q}$ und $\frac{r}{s}$ sind die Endpunkte derselben. Da $ps - qr = 1$ ist, so sind zugleich $\frac{p}{q}$ und $\frac{r}{s}$ reduzierte Brüche. Ist umgekehrt die Elementarsehne $\sigma = \left(\frac{p}{q}, \ \frac{r}{s}\right)$ gegeben, so können wir derselben die folgenden S-Substitutionen zuordnen

$$\begin{pmatrix} ep & e^{-1}r \\ eq & e^{-1}s \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -er & e^{-1}p \\ -es & e^{-1}q \end{pmatrix}$$

Dies sind scheinbar zwölf, da aber nur das Verhältnis der Koeffizienten in Betracht kommt, so reduziert sich die Anzahl derselben auf die folgenden sechs

$$\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \varrho p & \varrho^2 r \\ \varrho q & \varrho^2 s \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \varrho^2 p & \varrho r \\ \varrho^2 q & \varrho s \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -r & p \\ -s & q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\varrho r & \varrho^2 p \\ -\varrho s & \varrho^2 q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\varrho^2 r & \varrho p \\ -\varrho^2 s & \varrho q \end{pmatrix}.$$

Es sind das diejenigen sechs Substitutionen der Gruppe Γ_1 die σ_0 in $\left(\frac{p}{q}, \quad \frac{r}{s}\right)$ überführen.

Es gilt daher der folgende Satz.

3. Satz: „Jeder Substitution S entspricht eindeutig eine Elementarsehne σ. Umgekehrt sind jeder Elementarsehne σ sechs S-Substitutionen zugeordnet".

§ 24.
Die Substitutionen U der Gruppe $\bar{\Gamma_1}$.

Da eine Verwechslung ausgeschlossen ist, so behalten wir dieselben Bezeichnungen bei, wie in § 8.

U soll irgend eine Substitution der Gruppe $\bar{\Gamma_1}$ bezw. Γ_1 bedeuten, die die Fundamentalsehne σ_0 in sich transformiert. Unter $(\bar{U})$ fassen wir diejenigen Substitutionen U zusammen, die der Gruppe $\bar{\Gamma_1}$ und unter (U) diejenigen, die der Gruppe Γ_1 angehören.

Vorerst richten wir unser Augenmerk nur auf die Gruppe $(\bar{U})$. Die Substitutionen derselben wurden schon im vorigen Paragraphen angegeben, es sind das die folgenden:

$$\begin{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} \varrho & 0 \\ 0 & \varrho^2 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} \varrho^2 & 0 \\ 0 & \varrho \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 0 & -\varrho \\ \varrho^2 & 0 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 0 & -\varrho^2 \\ \varrho & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} -\varrho & 0 \\ 0 & \varrho^2 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} -\varrho^2 & 0 \\ 0 & \varrho \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 0 & \varrho \\ \varrho^2 & 0 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 0 & \varrho^2 \\ \varrho & 0 \end{pmatrix}. \end{matrix} \tag{1}$$

Durch elementare Rechnung überzeugt man sich auch hier, dass die Substitutionen (1) eine Gruppe bilden und zwar sind

$$U_1 = \begin{pmatrix} -\varrho & 0 \\ 0 & \varrho^2 \end{pmatrix} \text{ und } U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

die Erzeugenden dieser Gruppe. Die allgemeine Substitution derselben kann

$$U = U_1^r U_2^s \tag{3}$$

gesetzt werden, wo $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ und $s = 0, 1$ zu nehmen sind. — In der Tabelle (6) ist zu jedem der Systeme (1) die zugehörige Transformation U in der Gestalt (3) angegeben.

Sind $(a\,b\,b_0\,c)$ bezw. $(a\,b_1\,b_2\,c)$ die homogenen Koordinaten eines Punktes, so soll nun untersucht werden, wie sich dieselben verändern, wenn man sie einer Transformation U unterwirft.

Erachtet man, dass die konjugiert komplexe zu $\varrho\varrho^2$ ist, so ergibt das Formelsystem (3) in § 6, wenn man die Systeme (2) substituiert

$$\begin{aligned} U_1(a\,b\,b_0\,c) &= (a, -\varrho^2 b, -\varrho b_0, c), \\ U_2(a\,b\,b_0\,c) &= (cb_0ba), \end{aligned} \tag{4}$$

bezw. wenn

$$\varrho = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \tag{5}$$

genommen wird,

$$U_1(a, b_1, b_2, c) = (a, \frac{b_1 - \sqrt{3}b_2}{2}, \frac{\sqrt{3}b_1 + b_2}{2}, c)$$
$$U_2(a, b_1, b_2, c) = (c, b_1, -b_2, a). \tag{4'}$$

Um die bezüglichen Formeln für die allgemeine Substitution U zu erhalten, müssen wir die Transformationen (4) bezw. (4′) so oft wiederholen, als die Indices r und s in (3) angeben.

In der folgenden Tabelle ist nun zu der allgemeinen Substitution U, gegeben in der Gestalt (3), das zugehörige Koeffizientensystem verzeichnet, sowie die Koordinaten $(a'\, b_1'\, b_2'\, c')$ desjenigen Punktes, in welchen der Punkt $(a\, b_1\, b_2\, c)$ durch die betreffende Transformation U übergeführt wird.

$$\begin{array}{lll}
U_1^0 & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & (a\, b_1\, b_2\, c) \\
U_1 & \begin{pmatrix} -\varrho & 0 \\ 0 & \varrho^2 \end{pmatrix} & (a, \frac{b_1 - \sqrt{3}b_2}{2}, \frac{\sqrt{3}b_1 + b_2}{2}, c) \\
U_1^2 & \begin{pmatrix} \varrho^2 & 0 \\ 0 & \varrho \end{pmatrix} & (a, \frac{-b_1 - \sqrt{3}b_2}{2}, \frac{\sqrt{3}b_1 - b_2}{2}, c) \\
U_1^3 & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & (a, -b_1, -b_2, c) \\
U_1^4 & \begin{pmatrix} \varrho & 0 \\ 0 & \varrho^2 \end{pmatrix} & (a, \frac{-b_1 + \sqrt{3}b_2}{2}, \frac{-\sqrt{3}b_1 - b_2}{2}, c) \\
U_1^5 & \begin{pmatrix} -\varrho^2 & 0 \\ 0 & \varrho \end{pmatrix} & (a, \frac{b_1 + \sqrt{3}b_2}{2}, \frac{-\sqrt{3}b_1 + b_2}{2}, c) \\
U_2 & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & (c, b_1, -b_2, a) \\
U_1U_2 & \begin{pmatrix} 0 & -\varrho \\ \varrho^2 & 0 \end{pmatrix} & (c, \frac{b_1 + \sqrt{3}b_2}{2}, \frac{\sqrt{3}b_1 - b_2}{2}, a) \\
U_1^2U_2 & \begin{pmatrix} 0 & \varrho^2 \\ \varrho & 0 \end{pmatrix} & (c, \frac{-b_1 + \sqrt{3}b_2}{2}, \frac{\sqrt{3}b_1 + b_2}{2}, a) \\
U_1^3U_2 & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \varrho \end{pmatrix} & (c, -b_1, b_2, a) \\
U_1^4U_2 & \begin{pmatrix} 0 & \varrho \\ \varrho^2 & 0 \end{pmatrix} & (c, \frac{-b_1 - \sqrt{3}b_2}{2}, \frac{-\sqrt{3}b_1 + b_2}{2}, a) \\
U_1^5U_2 & \begin{pmatrix} 0 & -\varrho^2 \\ \varrho & 0 \end{pmatrix} & (c, \frac{b_1 - \sqrt{3}b_2}{2}, \frac{-\sqrt{3}b_1 - b_2}{2}, a).
\end{array} \tag{6}$$

Wie schon im vorigen Paragraphen bemerkt, gehören von den zwölf obenstehenden Substitutionen U,

$$U_1^0,\ U_1^2,\ U_1^4; \quad U_1U_2,\ U_1^3U_2,\ U_1^5U_2 \tag{7}$$

der Gruppe (U) an. Die sechs übrigen

$$U_1,\ U_1^3,\ U_1^5; \quad U_2,\ U_1^2U_2,\ U_1^4U_2 \tag{8}$$

gehen gliedweise aus jenen hervor durch Anfügung der Substitution U_1.

An Hand der Tabelle (6) überzeugt man sich von der Richtigkeit der folgenden Behauptung.

Die Transformation U_1 bedeutet eine Umdrehung des Raumes um die θ-Achse des ursprünglichen Koordinatensystems um 60°, die Transformation U_2 dagegen gibt eine Umklappung des Raumes um die ξ-Achse um 180°.

Man findet daher, dass die Koordinaten von einem und nur von einem der zwölf Punkte, die einander durch die Tabelle (6) zugeordnet sind, den Bedingungen genügen

$$a \geqq c, \quad b_1 + \sqrt{3}b_2 \geqq 0, \quad b_1 - \sqrt{3}b_2 > 0, \tag{9}$$

ist $a = c$, so soll noch $b_2 \leqq 0$ vorausgesetzt werden.

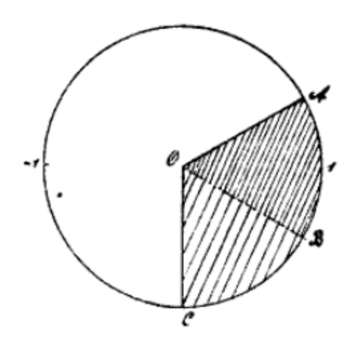
1. Bemerkung. Von den zwölf Punkten, die einander aequivalent sind durch die Substitutionen der Gruppe (U), genügen die Koordinaten eines und nur eines den Ungleichungen (9).

Fasst man nur die Substitutionen der Gruppe (U) ins Auge, so gibt es deren sechs (vgl. (7) oben). Geht man mit den Transformationen (7) in Tabelle (6), so findet man

2. Bemerkung. Von den sechs verschiedenen Punkten, die einander aequivalent sind durch die Substitutionen der Gruppe (U), genügen die Koordinaten eines und nur eines den Relationen

$$a \geqq c, \quad b_1 > 0, \quad b_1 + \sqrt{3}b_2 \geqq 0. \tag{10}$$

Ist $a = c$, so soll noch $b_1 - \sqrt{3}b_2 \geqq 0$ vorausgesetzt werden.



Die nebenstehende Figur veranschaulicht die Bereiche, die durch die Bemerkungen 1 und 2 charakterisiert sind. Man denkt sich den Punkt ∞ der Kugel $\mathfrak{K}$ durch Ebenen verbunden mit den Radien $O\,A$ und $O\,B$. Die obere Hälfte des keilförmigen Kugelausschnittes, der zum Sektor $A\,O\,B$ gehört, mit Einschluss der Punkte des Sektors $(A\,O\,1)$ und der Ebene $(\infty\,O\,A)$, und mit Ausschluss derjenigen der Ebene $(\infty\,O\,B)$ gehören dem durch die Relationen (9) charakterisierten Bereiche an. — Nimmt man endlich die obere Hälfte des Kugelausschnittes, der zum Sektor $A\,O\,C$ gehört, inklusive der Punkte des Sektors $(A\,O\,B)$ und der Ebene $(\infty\,O\,A)$, exklusive derjenigen der Ebene $(\infty\,O\,C)$, so erhält man den durch die Ungleichungen (10) charakterisierten Bereich.

§ 25.
Der Diskontinuitätsbereich der Gruppe Γ_1.

Wenn man die Untersuchungen in § 9 verfolgt, so erkennt man leicht, dass die dortigen Resultate zum Teil sich unverändert von der Gruppe Γ auf die neue Gruppe Γ_1 übertragen lassen.

Man findet, damit die Entfernung des Punktes $(a\,b\,b_0\,c)$ von der Elementarsehne $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ ein Minimum werde, muss, wie dort

$$(a\gamma\gamma_0 - b\alpha_0\gamma - b_0\alpha\gamma_0 + c\alpha\alpha_0)(a\delta\delta_0 - b\beta_0\delta - b_0\beta\delta_0 + c\beta\beta_0) \tag{1}$$
$$= \text{ein Minimum werden.}$$

Gestützt auf den Hülfssatz § 3 folgt wieder

1. Satz: "Ist P ein Punkt im Innern der Kugel $\mathfrak{K}$, so hat er von einer oder von mehreren, stets aber nur von endlich vielen Elementarsehnen eine kleinste Entfernung."

Wie in § 10 soll nun die Gesamtheit derjenigen Punkte $(a\, b_1\, b_2\, c)$ bestimmt werden, die von der Fundamentalsehne $(0, \infty)$ einen kleineren oder doch nicht grösseren Abstand haben, als von jeder andern Elementarsehne. Wir werden auch hier zeigen, dass der gefundene Bereich einen Diskontinuitätsbereich der Gruppe Γ_1 bildet.

Da bei den Transformationen U σ_0 in sich übergeht, so haben alle zwölf Punkte, die einander zugeordnet sind durch Tabelle (6) § 24, von derselben die nämliche Entfernung. Man könnte sich daher in den nun folgenden Untersuchungen etwa auf denjenigen der zwölf Punkte beschränken, dessen Koordinaten den Ungleichungen (9) § 24 genügen, doch genügt es vorerst, nur an der ersten jener Bedingungen festzuhalten. — Wir betrachten also nur solche Punkte $(a\, b_1\, b_2\, c)$, deren Koordinaten die Bedingung

$$a \geqq c \tag{2}$$

befriedigen. — Fast wörtlich dieselbe Diskussion wie in § 9 lässt die Richtigkeit des folgenden Satzes erkennen.

2. Satz: „Ist $(a\, b_1\, b_2\, c)$ ein innerer Punkt der Kugel $\mathfrak{K}$, und soll derselbe von der Sehne σ_0 eine kleinere oder doch nicht grössere Entfernung haben, als von jeder andern Elementarsehne σ, so müssen seine Koordinaten die Ungleichung

$$a\mu\mu_0 - b\lambda_0\mu - b_0\lambda\mu_0 + c\lambda\lambda_0 \geqq a \tag{3}$$

erfüllen. Darin bedeuten λ und μ zwei beliebige ganze Zahlen aus dem Zahlkörper der dritten Einheitswurzel, die keinen gemeinschaftlichen Teiler haben und von denen die zweite μ nicht gleich Null sein darf. Es ist dabei noch die Voraussetzung getroffen, dass die Koordinaten des Punktes der Bedingung (2) genügen.“

$\dfrac{\lambda}{\mu}$ ergibt den einen Endpunkt der Elementarsehne σ; und zwar ist es für diejenigen Elementarsehnen, die durch den Punkt $\left(\dfrac{1}{0}\right)$ hindurchgehen, der andere Endpunkt.

Wir werden nun zeigen, dass die Ungleichung (3) für jede Elementarsehne σ erfüllt ist, wenn sie durch die folgenden sechs Zahlenpaare $(\lambda\, \mu)$ befriedigt ist,

$$(1, 1), \quad (1, \varrho), \quad (1, \varrho^2), \quad (1, -1), \quad (1, -\varrho), \quad (1, -\varrho^2).$$

Substituiert man dieselben in (3), so findet man, dass die Koordinaten $(a\, b_1\, b_2\, c)$ des betrachteten Punktes den folgenden Relationen Genüge leisten müssen

$$\begin{array}{rr} c + 2b_1 \geqq 0 & c - 2b_1 \geqq 0 \\ c + b_1 + \sqrt{3}b_2 \geqq 0 & c - b_1 - \sqrt{3}b_2 \geqq 0 \\ c + b_1 - \sqrt{3}b_2 \geqq 0 & c - b_1 + \sqrt{3}b_2 \geqq 0 \\ \multicolumn{2}{c}{\text{wozu noch tritt} \quad a \geqq c.} \end{array} \tag{4}$$

Der Beweis für die obige Behauptung ist der folgende. Genügen die Koordinaten eines Punktes den Ungleichungen (4), so kann man

$$a = A + |b_1| + \sqrt{3}|b_2|; \quad c = C + |b_1| + \sqrt{3}|b_2|$$

setzen, wo

$$A \geqq C \geqq 0$$

ist, und wo $|b_1|$ und $|b_2|$ die absoluten Beträge von b_1, und b_2 bedeuten. Setzt man diese Ausdrücke für a und für c, sowie $b = \epsilon|b_1| + i\eta|b_2|$ (wo ϵ und $\eta = \pm 1$ sind) in (3) ein, so geht jene Ungleichung über in

$$\bar{a}(\lambda\,\mu) = \left\{ \begin{array}{c} A\mu\mu_0 + C\lambda\lambda_0 + |b_1|(\mu - \epsilon\lambda)(\mu_0 - \epsilon\lambda_0) \\ +\sqrt{3}|b_2|\Big[\Big(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\Big)(\lambda\lambda_0 + \mu\mu_0) + \frac{(\mu + i\eta\lambda)(\mu_0 - i\eta\lambda_0)}{\sqrt{3}}\Big] \end{array} \right\} \geqq A + |b_1| + \sqrt{3}|b_2|, \qquad (5)$$

wo $a(\lambda\,\mu)$ die Abkürzung ist für die linke Seite dieser Ungleichung.

Da $\frac{1}{2} > 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{3}$ ist, so erkennt man, dass (5) immer erfüllt ist, wenn

$$\mu, \lambda, \mu - \epsilon\lambda \neq 0, 0, 0 \text{ und}$$
$$\lambda\lambda_0 + \mu\mu_0 \geqq 3$$

ist. Nach Voraussetzung ist $\mu \neq 0$, es sind daher nur die folgenden Fälle eingehender zu diskutieren:

a) $\lambda = 0$, dann ist $\mu = 1$, und man erhält $\bar{a} = A + |b_1| + \sqrt{3}|b_2|\Big[1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\Big] = a$.

b) $\mu - \epsilon\lambda = 0$, in diesem Falle werden λ und μ Einheiten und zwar, wie man leicht verifiziert, so dass wieder $(\mu + i\eta\lambda)(\mu_0 - i\eta\lambda_0) = 2$ wird. Man erhält daher $\bar{a} = A + C + \sqrt{3}|b_2|\Big[\Big(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\Big)2 + \frac{2}{\sqrt{3}}\Big] = A + C + 2\sqrt{3}|b_2| = a + c - 2|b_1|$; und da, wie man aus (4) entnimmt, $c - 2|b_1| \geqq 0$ ist, wird auch $\bar{a} \geqq a$.

c) $\lambda\lambda_0 + \mu\mu_0 = 1$, dies tritt nur dann ein, wenn $\lambda = 0$, $\mu = 1$ ist; dieser Fall ist unter a) erledigt.

d) $\lambda\lambda_0 + \mu\mu_0 = 2$, hier ist nur noch die Möglichkeit zu diskutieren, dass λ und μ Einheiten sind. Nehmen wir $\lambda = 1$, $\mu = e$ (eine beliebige Einheit aus dem Zahlkörper der dritten Einheitswurzel) an, es wird dann

$$(\mu - \epsilon\lambda)(\mu_0 - \epsilon\lambda_0) = 2 - \epsilon(e + e_0);$$
$$(\mu + i\eta\lambda)(\mu_0 - i\eta\lambda_0) = 2 + i\eta(e - e_0).$$

Wenn e eine reelle Einheit ist, so wird $e + e_0 = \pm 2$, $e - e_0 = 0$, also $(\mu - \epsilon\lambda)(\mu_0 - \epsilon\lambda_0) = 2 \pm 2$ und $(\mu + i\eta\lambda)(\mu_0 - i\eta\lambda_0) = 2$. Man findet dann $\bar{a} = A + C + |b_1|(2 \pm 2) + \sqrt{3}|b_2|\Big[\Big(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\Big)2 + \frac{2}{\sqrt{2}}\Big] = A + C + (2 \pm 2)|b_1| + 2\sqrt{3}|b_2| = a + c \pm 2|b_1|$, woraus man wieder (zufolge (4)) erkennt, dass $\bar{a} \geqq a$ ist.

Ist e eine komplexe Einheit, so wird $e + e_0 = \pm 1$, und $i(e - e_0) = \pm\sqrt{3}$, also $(\mu - \epsilon\lambda)(\mu_0 - \epsilon\lambda_0) = 2 \pm 1$; $(\mu + i\eta\lambda)(\mu_0 - i\eta\lambda_0) = 2 \pm \sqrt{3}$; daher erhält man $\bar{a} = A + C + |b_1|(2\pm 1) + \sqrt{3}|b_2|\left[\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)2 + \frac{2\pm\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right] = A + C + |b_1|(2\pm 1) + \sqrt{3}|b_2|(2\pm 1) = a + c \pm |b_1| \pm \sqrt{3}|b_2|$. Zufolge (4) übersieht man, dass auch in diesem Falle $\bar{a} \geqq a$ erfüllt ist.

Dies sind die einzig möglichen ungünstigen Fälle; wir haben gezeigt, dass auf Grund von (4) in jedem derselben die Ungleichung (5) und also auch (3) befriedigt bleibt. Der gewünschte Beweis ist damit erbracht; wir fügen demselben noch die folgende Bemerkung bei in Form eines Satzes.

3. Satz: „Sind $(a\, b_1\, b_2\, c)$ die Koordinaten eines Punktes und genügen dieselben den Ungleichungen (4), so dass an keiner Stelle, ausgenommen etwa bei $a \geqq c$, das Gleichheitszeichen eintritt, so hat der betreffende Punkt von der Fundamentalsehne σ_0 eine kleinere Entfernung, als von jeder andern Elementarsehne σ. — Tritt dagegen an irgend einer (der in Betracht kommenden) Stellen statt des Grösserzeichens das Gleichheitszeichen ein, so hat zwar der Punkt von σ_0 immer noch eine kleinste Entfernung, aber es gibt dann und nur dann noch eine oder mehrere andere Elementarsehnen σ, von denen der Punkt $(a\, b_1\, b_2\, c)$ dieselbe Entfernung hat, wie von σ_0."

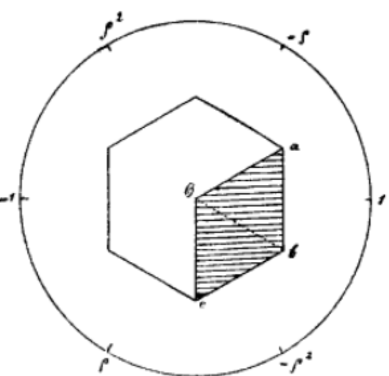
Der Grenzfall a) oben, wo $\bar{a}$ nur gerade $= a$ wird, scheint allerdings sich dem eben ausgesprochenen Satze nicht unterwerfen zu wollen. Nimmt man aber den zweiten, von $\frac{0}{1}$ verschiedenen Endpunkt der Sehne σ, so wird für diesen, da er nicht mit $\frac{1}{0}$ zusammenfallen kann, sicher $\bar{a} > a$, so dass also auch in diesem Falle Satz 3 gewahrt bleibt.

Wir fassen nun die Gesamtheit derjenigen Punkte ins Auge, die den Bedingungen (9) § 24, sowie den Ungleichungen (4) oben genügen. (Von den letzteren kommt nur noch eine in Betracht.) Sie ist charakterisiert durch

$$a \geqq c; \quad b_1 + \sqrt{3}b_2 \geqq 0; \quad b_1 - \sqrt{3}b_2 > 0; \quad c - 2b_1 \geqq 0. \qquad (\mathrm{B_a})$$

Die betreffenden Punkte liegen im Innern und auf der Begrenzung eines Tetraeders, dessen Seitenflächen in rechtwinkligen Koordinaten $(\xi\, \eta\, \theta)$ die folgenden Gleichungen haben

$$\theta = 0; \quad \xi + \sqrt{3}\eta = 0; \quad \xi - \sqrt{3}\eta = 0; \quad 2\xi + \theta - 1 = 0.$$



Die Punkte der ersten dieser Seitenflächen gehören nur teilweise, die der dritten gar nicht dem durch $(\mathrm{B_a})$ definierten Bereiche an (vgl. (9) § 24).

Es soll nun zu dem eben erwähnten Tetraeder noch dasjenige hinzugenommen werden, das aus ihm durch die Substitution U_1 hervorgeht. Die beiden stossen an der Ebene $\xi - \sqrt{3}\eta = 0$ aneinander und erfüllen zusammen einen

pentaedrischen Raum P_0, dessen Basisfläche aus der nebenstehenden Figur [1]) ersichtlich ist; nämlich der Rhombus $(0\,a\,b\,c)$.

Wir wollen den Bereich der zu P_0 gehörenden Punkte durch folgende Definition genauer umgrenzen.

D e f i n i t i o n. Zum Pentaeder P_0 sollen alle Punkte gehören, die im Innern desselben liegen. Ferner von der Begrenzung diejenigen, die den Dreiecken $(\infty\,O\,a)$, $(\infty\,a\,b)$ und $(O\,a\,b)$ angehören. (∞ bedeutet den Punkt ∞ der Kugel $\mathfrak{K}$.) Sie befriedigen die folgenden Ungleichungen

$$\begin{gathered} b_1 > 0; \quad b_1 + \sqrt{3}b_2 \geqq 0; \quad c - 2b_1 \geqq 0; \quad c - b_1 - \sqrt{3}b_2 > 0 \\ a > c \text{ und } a = c, \text{ wenn noch } b_1 - \sqrt{3}b_2 \geqq 0 \text{ ist.} \end{gathered} \tag{B}$$

Vergleicht man die Bemerkung 2, § 24, insbesondere die Ungleichungen (10) dort mit (B) oben, so erkennt man, dass durch die Substitutionen der Gruppe (U) (vgl. (7) § 24) das Pentaeder P_0 in sechs zu ihm aequivalente Räume übergeht, die zusammen ein Dodekaeder einfach und lückenlos ausfüllen.

Wir wollen dasselbe mit T_0' bezeichnen, es gilt dann der

4. Satz: „Ist Q ein Punkt von T_0', so gibt es immer einen und auch nur einen Punkt Q_0, der dem Pentaeder P_0 angehört, und der durch eine Substitution der Gruppe (U) aus Q entspringt.“

Damit ein Punkt Q dem Dodekaeder T_0' angehöre, müssen seine Koordinaten $(a\ b_1\ b_2\ c)$, wie sich beim Übergang von P_0 auf T_0' ergibt, den folgenden Bedingungen genügen

$$\begin{aligned} a &\geqq 2|b_1| & c &\geqq 2|b_1| \\ a &\geqq |b_1 + \sqrt{3}b_2| & c &\geqq |b_1 + \sqrt{3}b_2| \\ a &\geqq |b_1 - \sqrt{3}b_2| & c &\geqq |b_1 - \sqrt{3}b_2|. \end{aligned} \tag{B'}$$

Wir bemerken, dass die Bedingungen (B′) sich nicht vollkommen decken mit denjenigen, die für T_0' gelten, indem an einzelnen Stellen die Gleichheitszeichen wegfallen müssten.

Nur bei Anlass der Diskussion des Diskontinuitätsbereiches der Gruppe Γ_1 werden wir nochmals Gebrauch machen von T_0', sonst aber wollen wir als F u n d a m e n t a l - d o d e k a e d e r T_0, das durch die Bedingungen (B′) charakterisierte, ansprechen. — Wir erhalten sofort ein anschauliches Bild von T_0, wenn wir uns in der Figur p. 71 die Seiten des (im Innern des Kreises gelegenen) regulären Sechseckes durch Ebenen mit den Punkten 0 und ∞ der Kugel $\mathfrak{K}$ verbunden denken. Die zwölf Ebenen umhüllen ein Dodekaeder, die Punkte im Innern und auf der Begrenzung desselben gehören T_0 an.

Wenn man die Ungleichungen (4) und (B′) miteinander vergleicht, so sieht man, dass, wenn die Koordinaten eines Punktes den Bedingungen (4) genügen, sie dann auch (B′) befriedigen. Man erhält so aus Satz 3 den folgenden

[1]) Die obenstehende Figur kann sehr leicht konstruiert werden. Man markiert auf dem Kreise die Punkte des regulären Sechseckes $(1, -\varrho^2, \varrho, -1, \varrho^2, -\varrho)$ und verbindet zwei nicht konsekutive und nicht diametral gegenüberliegende Punkte durch eine Sehne. Diese umhüllen das innere Sechseck.

5. Satz: „Besitzt der Punkt $(a\,b_1\,b_2\,c)$ von der Fundamentalsehne σ_0 eine kleinere Entfernung als von jeder andern Elementarsehne σ, so liegt er im Innern des Fundamentaldodekaeders T_0. Besitzt der Punkt von der Sehne σ_0 immer noch eine kleinste Entfernung, gibt es aber noch andere Elementarsehnen, von denen er eine ebenso kleine Entfernung hat, so liegt er auf der Begrenzung von T_0. Zugleich ist auch die Umkehrung dieser Behauptungen erfüllt."

Dass in der Tat auch die Umkehrung der Behauptungen im ersten Teil des Satzes 5 erfüllt ist, lässt folgende Überlegung erkennen. Genügen die Koordinaten eines Punktes den Relationen (B′) und ausserdem der Bedingung $a \geqq c$, so genügen sie auch (4). Ist aber $a < c$, so unterwerfen wir den Punkt der Transformation (U_2), wobei seine Entfernung von σ_0 nicht geändert wird; wie man sich sofort überzeugt, kommt man dann auf den vorangehenden Fall, die Umkehrung gilt also unbedingt.

σ_0 wollen wir die Hauptdiagonale des Fundamentaldodekaeders T_0 nennen.

Jede Substitution, die T_0 in sich transformieren soll, muss auch σ_0 in sich überführen; es folgt daher

6. Satz: „Die Substitutionen der Gruppe (U) sind die einzigen in Γ_1 enthaltenen, die T_0 in sich selber überführen."

Ferner gilt

7. Satz: „Jeder Elementarsehne $\sigma = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\gamma} & \frac{\beta}{\delta} \end{pmatrix}$ gehört ein bestimmtes Dodekaeder T an, das aus T_0 durch die Substitution $S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ hervorgeht, bezw. durch die Substitutionen $S\,U$, wo U jede der Transformationen der Gruppe U sein kann. σ ist Hauptdiagonale von T und die Punkte im Innern und auf der Begrenzung von T besitzen von jeder andern Elementarsehne eine grössere oder wenigstens eben so grosse Entfernung wie von der Sehne σ."

8. Satz: „Die Gesamtheit der Dodekaeder T erfüllt das Kugelinnere einfach und lückenlos."

Der Beweis hierzu ist derselbe wie zu Satz 6 § 10.

9. Satz: „Ist Q ein Punkt im Innern der Kugel $\mathfrak{K}$, so gibt es wenigstens einen Punkt Q_0 des Dodekaeders T_0, der Q aequivalent ist bezüglich der Gruppe Γ_1."

Es ist dies unmittelbare Folge von Satz 7 und 8.

Entweder gehört der Punkt Q_0 bereits nicht nur dem Dodekaeder T_0 an, sondern auch dem Bereiche T_0', oder aber er gehört diesem letzteren noch nicht an. Nehmen wir an, er gehöre T_0' noch nicht an, Q_0 liegt dann auf einem gewissen Stück der Begrenzung von T_0.

Wenn man die Begrenzung von T_0' (so weit eine solche überhaupt existiert) genau betrachtet und wenn man beachtet, dass die Transformationen

$$\begin{pmatrix} 1 & \epsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \epsilon & 1 \end{pmatrix} \text{ für } \epsilon = \pm 1, \pm\varrho, \pm\varrho^2 \qquad (6)$$

der Gruppe Γ_1, angehören, so findet man, dass durch je eine der zwölf Substitutionen (6) der betreffende Punkt Q_0 übergeführt wird in einen Punkt Q_0', der nicht nur T_0, sondern auch T_0' angehört. Fasst man anderseits die Begrenzung von T_0' ins Auge, sowie die Begrenzungen derjenigen zwölf Gebiete T', die aus T_0' durch die Transformationen (6) entspringen (soweit solche Begrenzungen vorhanden sind), so erkennt man, dass die betreffenden Ebenenstücke die Begrenzung von T_0 einfach und lückenlos überdecken.

Aus dieser Bemerkung und ferner aus Satz 4 und 9 folgt

10. Satz: „Ist Q ein beliebiger Punkt im Innern der Kugel, so gibt es immer einen und auch nur einen Punkt Q_0, der dem Pentaeder P_0 angehört und der Q aequivalent ist durch eine Substitution der Gruppe Γ_1."

In der Tat kann es auch nicht zwei Punkte Q_0 und Q_0' geben, die diese Eigenschaft besitzen, sonst müssten dieselben einander aequivalent sein bezüglich einer Substitution S, die nicht in (U) vorkommt (vgl. 4. Satz). Durch S ist ein T_0' korrespondierender Bereich T' bestimmt, der aber, wie wir wissen, keinen Punkt mit T_0' und also auch keinen mit P_0 gemein hat, was auf einen Widerspruch führt.

Man kann daher das Pentaeder P_0 als Diskontinuitätsbereich in engerem Sinne der Gruppe Γ_1, ansprechen. Der nämliche Umstand wie in § 10 veranlasst uns auch hier, das Fundamentaldodekaeder T_0 in erweitertem Sinne als Diskontinuitätsbereich der Gruppe Γ_1 zu bezeichnen.

§ 26.
Die Reduktion der definiten Hermiteschen Form.

Die Theorie der Reduktion der definiten Hermiteschen Form durch die Gruppe Γ_1 ist nichts anderes als eine Übertragung der Entwicklungen in § 12 u. ff. von der Gruppe Γ auf die Gruppe Γ_1. Da die Diskussion im wesentlichen dieselbe ist wie dort, so verweisen wir der Hauptsache nach nur auf jene.

Wir stellen folgende Definition auf.

Definition. Die definite Hermitesche Form soll dann und nur dann reduziert heissen (im Sinne der Gruppe Γ_1), wenn der Repräsentant derselben dem Fundamentaldodekaeder T_0 angehört.

Die Untersuchungen in § 12 können wörtlich in jener Gestalt hierher übernommen werden, mit der einzigen Modifikation, dass an Stelle des durch die Ungleichungen (4) dort charakterisierten Bereichs derjenige tritt, der durch die folgenden Bedingungen definiert ist,

$$a \geqq c; \quad b_1 + \sqrt{3}b_2 \geqq 0; \quad b_1 - \sqrt{3}b_2 > 0 \tag{1}$$

(vgl. Bemerkung 1, § 24). Bei der Reduktion soll also von denjenigen zwölf Punkten, die einander zugeordnet sind, durch die Substitutionen der Gruppe $(\bar{U})$ immer der ins Auge gefasst werden, der den Relationen (1) genügt; $(a\, b_1\, b_2\, c)$ sei derselbe.

Ist für ihn nicht zugleich auch

$$c - 2b_1 \geqq 0 \tag{2}$$

befriedigt, so gehört er T_0 noch nicht an (vgl. (B) § 25), und die Transformation

$$N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die

$$\begin{aligned} &a \text{ in } a-2b_1+c \qquad && b_2 \text{ in } b_2 \\ &b_1 \text{ in } b_1-c && c \text{ in } c \end{aligned} \tag{3}$$

übergehen lässt, nähert dann den Repräsentanten der Form der gewünschten Lage immer, so lange (2) noch nicht erfüllt ist. Analog wie oben (§ 12) lässt sich zeigen, dass diese Endlage für jede definite Hermitesche Form nach endlich vielen Operationen (3) eintritt.

Es sei noch erwähnt, dass es zu einer gegebenen Form $(a\,b\,b_0\,c)$ zwölf im Sinne der Gruppe $\bar{\Gamma}_1$ aequivalente reduzierte Formen gibt; wir wollen eine solche $(A\,B\,B_0\,C)$ bezw. $(A\,B_1\,B_2\,C)$ schreiben. Sie sind gegeben durch Tabelle (6) § 24, wenn man dort a, b_1, b_2, c ersetzt durch A, B_1, B_2, C.

Sollen aus diesen zwölf Formen diejenigen herausgesucht werden, welche der ursprünglichen Form aequivalent sind bezüglich der Gruppe Γ_1, so ist die Diskussion die folgende. Ist $(A\,B_1\,B_2\,C)$ derjenige Punkt, auf welchen wir bei dem oben besprochenen Verfahren endlich geführt werden, der also insgesamt den folgenden Bedingungen genügt

$$A \geqq C;\ B_1+\sqrt{3}B_2 \geqq 0;\ B_1-\sqrt{3}B_2 > 0;\ C-2B_1 \geqq 0, \tag{4}$$

so entspricht der successiven Überführung des Repräsentanten $(a\,b_1\,b_2\,c)$ in $(A\,B_1\,B_2\,C)$ eine Substitution von der Form

$$R = U_1^{r_1}U_2^{s_1}NU_1^{r_2}U_2^{s_2}NU_1^{r_3}U_2^{s_3}NU_1^{r_4}\dots \tag{5}$$

Hier ist nun $|N| = 1$, währenddem $|U_1| = -1$ und $|U_2| = -1$ ist (vgl. (2) § 24); es wird also

$$|R| = (-1)^{r_1+s_1+r_2+s_2+r_3+\cdots},$$

und man ersieht hieraus folgendes:

B e m e r k u n g. a) Ist R so, dass $r_1+s_1+r_2+s_2+r_3+\cdots = 2n$ ist, wo n eine ganze rationale Zahl ist, so wird $|R| = 1$; R ist eine Substitution der Gruppe Γ_1, und es sind

$$\begin{gathered} (A, B_1, B_2, C), \qquad (C, \tfrac{1}{2}(B_1+\sqrt{3}B_2), \tfrac{1}{2}(\sqrt{3}B_1-B_2), A); \\ (A, \tfrac{1}{2}(-B_1-\sqrt{3}B_2), \tfrac{1}{2}(\sqrt{3}B_1-B_2), C), \\ (C, \tfrac{1}{2}(B_1-\sqrt{3}B_2), \tfrac{1}{2}(-\sqrt{3}B_1-B_2), A); \\ (A, \tfrac{1}{2}(-B_1+\sqrt{3}B_2), \tfrac{1}{2}(-\sqrt{3}B_1-B_2), C), \qquad (C, -B_1, -B_2, A) \end{gathered}$$

die zur ursprünglichen aequivalenten reduzierten Formen.

b) Ist aber in R $r_1+s_1+r_2+s_2+r_3+\cdots = 2n+1$, wo n dieselbe Beschaffenheit hat wie oben, dann ist $|R| = -1$, dagegen ist dann $|U_1R| = 1$, d. h. U_1R ist eine Substitution der Gruppe Γ_1, und es werden, wie die Bemerkung, die an (8) § 24 geknüpft wurde, lehrt,

$$\begin{gathered} (A, \tfrac{1}{2}(B_1-\sqrt{3}B_2), \tfrac{1}{2}(\sqrt{3}B_1+B_2), C), \quad (C, B_1, -B_2, A); \\ (A, -B_1, -B_2, C), \quad (C, \tfrac{1}{2}(-B_1+\sqrt{3}B_2), \tfrac{1}{2}(\sqrt{3}B_1+B_2), A); \\ (A, \tfrac{1}{2}(B_1+\sqrt{3}B_2), \tfrac{1}{2}(-\sqrt{3}B_1+B_2), C), \\ (C, \tfrac{1}{2}(-B_1-\sqrt{3}B_2), \tfrac{1}{2}(-\sqrt{3}B_1+B_2), A) \end{gathered}$$

die zugehörigen reduzierten Formen.

Auch hier kann die Anzahl der zur Form $(a\,b\,b_0\,c)$ gehörigen reduzierten Formen grösser oder kleiner sein als sechs (bezw. zwölf), was dann eintritt, wenn der Repräsentant der reduzierten Form im Dodekaeder T_0 eine besondere Lage einnimmt.

Beispiel.[1])

$$\text{Form } (107, 59 - 41\varrho, 59 - 41\varrho^2, 71).$$

a	b_1	b_2	c	U	$\bar{a}$	$\bar{b}_1$	$\bar{b}_2$	$\bar{c}$	$\bar{a} - 2\bar{b}_1 + \bar{c}$	$\bar{b}_1 - \bar{c}$
107	$79\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}\cdot 20\frac{1}{2}$	71						19	$8\frac{1}{2}$
19	$8\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}\cdot 20\frac{1}{2}$	71	$U_1^5U_2$	71	35	$\sqrt{3}\cdot 6$	19	20	16
20	16	$\sqrt{3}\cdot 6$	19	U_1^5	20	17	$-\sqrt{3}\cdot 5$	19	5	-2
5	-2	$-\sqrt{3}\cdot 5$	19	$U_1^4U_2$	19	$8\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}\cdot 1\frac{1}{2}$	5	7	$3\frac{1}{2}$
7	$3\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}\cdot 1\frac{1}{2}$	5	U_1	7	4	$\sqrt{3}\cdot 1$	5	4	-1
4	-1	$\sqrt{3}$	5	$U_1^2U_2$	5	2	0	4		

Reduzierte Form (5, 2, 0, 4) oder (5, 2, 2, 4).

$$R = U_1^2U_2NU_1NU_1^4U_2NU_1^5NU_1^5U_2N = \begin{pmatrix} 2+\varrho & -2 \\ 1+4\varrho & -3-5\varrho \end{pmatrix}.$$

Wie man sieht, ist in unserem Beispiel $r_1 + s_1 + r_2 + s_2 + \cdots = 20$, also folgt aus obenstehender Bemerkung, dass die zu

$$(107, 59 - 41\cdot\varrho, 59 - 41\cdot\varrho^2, 71)$$

aequivalenten reduzierten Formen die folgenden sind

$$\begin{array}{ll} (5,\ 2,\ 0,\ 4) & (4,\ 1,\ \sqrt{3},\ 5) \\ (5, -1,\ \sqrt{3},\ 4) & (4, -2,\ 0,\ 5) \\ (5, -1, -\sqrt{3},\ 4) & (4,\ 1, -\sqrt{3},\ 5). \end{array}$$

Da ausserdem die reduzierte Form $(A\,B_1\,B_2\,C)$ der Bedingung genügt $C - 2B_1 = 0$, so liegt der Repräsentant derselben auf der Begrenzung des Fundamentaldodekaeders T_0, und es treten zu den obigen noch die folgenden weiteren reduzierten Formen hinzu

$$\begin{array}{ll} (5, -2,\ 0,\ 4) & (4, -1, -\sqrt{3},\ 5) \\ (5,\ 1, -\sqrt{3},\ 4) & (4,\ 2,\ 0,\ 5) \\ (5,\ 1,\ \sqrt{3},\ 4) & (4, -1,\ \sqrt{3},\ 5). \end{array}$$

Die transponierte zu

$$\begin{pmatrix} 2+\varrho & -2 \\ 1+4\varrho & -3-5\varrho \end{pmatrix} \text{ also } \begin{pmatrix} 2+\varrho & 1+4\varrho \\ -2 & -3-5\varrho \end{pmatrix}$$

ist eine der Substitutionen, die die ursprüngliche Form in eine reduzierte Form übergehen lassen.

[1]) Eine Erläuterung der Tabelle ist nicht mehr notwendig, dieselbe ist konform derjenigen in § 13.

§ 27.
Reduktion der Dirichletschen Form.

Das Prinzip, das der Reduktion der Dirichletschen Form $(a\,b\,c)$ zugrunde gelegt wird, ist dasselbe wie im Falle der Reduktion durch die Gruppe Γ (vgl. § 15 und ff.).

Wir stellen die folgende Definition auf.

Definition. Die Dirichletsche Form $(a\,b\,c)$ soll reduziert heissen (im Sinne der Gruppe Γ_1), wenn die repräsentierende Sehne $(a\,b\,c)$ derselben wenigstens einen Punkt mit dem Fundamentaldodekaeder T_0 gemein hat.

Die einzige Modifikation, die gegenüber den Entwicklungen in § 10 auftritt, ist die durch die Gruppe $(\bar{U})$ bedingte (wie das schon in § 26 der Fall war, bei der Reduktion der definiten Hermiteschen Form).

An Hand von (3) § 15 findet man bei Substitution der Systeme die in (6) § 24 angegeben sind

$$\begin{aligned}
&(a\,b\,c)U_1^0 = (a\,b\,c) && (a\,b\,c)U_2 \quad\; = (c\,b\,a)\\
&(a\,b\,c)U_1 \;= (\varrho^2\cdot a, -b, \varrho c) && (a\,b\,c)U_2U_1 \;= (\varrho^2 c, -b, \varrho a)\\
&(a\,b\,c)U_1^2 = (\varrho\cdot a, b, \varrho^2\cdot c) && (a\,b\,c)U_2U_1^2 = (\varrho\cdot c, b, \varrho^2\cdot a)\\
&(a\,b\,c)U_1^3 = (a, -b, c) && (a\,b\,c)U_2U_1^3 = (c, -b, a)\\
&(a\,b\,c)U_1^4 = (\varrho^2\cdot a, b, \varrho\cdot c) && (a\,b\,c)U_2U_1^4 = (\varrho^2\cdot c, b, \varrho\cdot a)\\
&(a\,b\,c)U_1^5 = (\varrho\cdot a, -b, \varrho^2\cdot c) && (a\,b\,c)U_2U_1^5 = (\varrho\cdot c, -b, \varrho^2\cdot a)
\end{aligned} \tag{1}$$

und hieraus berechnet man weiter

$$\begin{aligned}
&(ab_0+bc_0)U_1^0 = (ab_0+bc_0) && (ab_0+bc_0)U_2 \quad\; = (a_0b+b_0c)\\
&(ab_0+bc_0)U_1 \;= -\varrho^2(ab_0+bc_0) && (ab_0+bc_0)U_2U_1 \;= -\varrho^2(a_0b+b_0c)\\
&(ab_0+bc_0)U_1^2 = \varrho(ab_0+bc_0) && (ab_0+bc_0)U_2U_1^2 = \varrho(a_0b+b_0c)\\
&(ab_0+bc_0)U_1^3 = -(ab_0+bc_0) && (ab_0+bc_0)U_2U_1^3 = -(a_0b+b_0c)\\
&(ab_0+bc_0)U_1^4 = \varrho^2(ab_0+bc_0) && (ab_0+bc_0)U_2U_1^4 = \varrho^2(a_0b+b_0c)\\
&(ab_0+bc_0)U_1^5 = -\varrho(ab_0+bc_0) && (ab_0+bc_0)U_2U_1^5 = -\varrho(a_0b+b_0c).
\end{aligned} \tag{2}$$

Von den zwölf Formen, die einander aequivalent sind bezüglich der Substitutionen der Gruppe $(\bar{U})$, wählen wir nun immer diejenige eindeutig bestimmte, deren Koeffizienten den folgenden Ungleichungen genügen

$$|c| \geqq |a|;\; -R(ab_0+bc_0) + \sqrt{3}J(ab_0+bc_0) \geqq 0;$$
$$-R(ab_0+bc_0) - \sqrt{3}J(ab_0+bc_0) > 0, \tag{3}$$

— diese Bedingungen treten an Stelle von (2) § 18. — Sei $(a\,b\,c)$ selber diese Form.

Ist nun der Ausdruck

$$B = \sqrt{DD_0} + aa_0 + bb_0 + 2R(ab_0+bc_0) \geqq 0, \tag{4}$$

so ist die Form $(a\,b\,c)$ bereits eine reduzierte. Ist aber (4) nicht erfüllt, so ersetzen wir

$$\begin{aligned}
&a \text{ durch } a\\
&b \text{ durch } a+b\\
&c \text{ durch } a+2b+c,
\end{aligned} \tag{5}$$

von der neuen Form, die wir dabei erhalten, wissen wir, dass ihre repräsentierende Sehne sich der gewünschten Lage angenähert hat und dass dies immer statt hat, solange (4) noch nicht erfüllt ist. Der Beweis, dass die gewünschte Endlage nach endlich vielen Operationen eintreten wird, ist vollkommen derselbe wie in § 18.

Zu dem in nebenstehender Tabelle durchgeführten Beispiele der Reduktion einer Dirichletschen Form sei noch folgendes erwähnt.

Wenn man die reellen und imaginären Teile von $(ab_0 + bc_0)$ und von

$$\pm 1; \quad \pm\varrho = \pm\Big(\frac{-1+\sqrt{3}\cdot i}{2}\Big); \quad \pm\varrho^2 = \pm\Big(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\Big)$$

betrachtet, so ersieht man leicht aus Tabelle (2), welche der Transformationen U die vorliegende Form in diejenige Form überführt, deren Koeffizienten den Ungleichungen (3) genügen; aus Tabelle (1) entnimmt man nachher die Koeffizienten selber, welche man, so lange als notwendig, der Operation (5) unterwirft.

B e i s p i e l[1])

$$\text{Form } (73 - 81\cdot\varrho,\ -27+53\cdot\varrho,\ 8-33\cdot\varrho).$$

$$D = 9 + 59\cdot\varrho;\ \sqrt{DD_0} = 55+\theta,\ \text{wo } 0<\theta<1.$$

a	b	c	aa_0	cc_0	$-(ab_0+bc_0)$	U	bb_0	$B-\theta$
$73-81\cdot\varrho$	$-27+53\cdot\varrho$	$8-33\cdot\varrho$	17803	1417	$11914\frac{1}{2}+i\cdot 1074\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}$	U_2	4969	-17388
$8-33\cdot\varrho$	$-19+20\cdot\varrho$	$27-8\cdot\varrho$	1417	1009	$2224\frac{1}{2}+i\cdot 427\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}$	U_2	1141	-2244
$27-8\cdot\varrho$	$8+12\cdot\varrho$	$-3-\varrho$	1009	7	$24+i\cdot 208\cdot\sqrt{3}$	U_2U_1	112	-474
$2+3\cdot\varrho$	$-6-9\cdot\varrho$	$-6+14\cdot\varrho$	7	316	$96-i\cdot 69\cdot\sqrt{3}$	U_1	63	-112
$1-2\cdot\varrho$	$7+7\cdot\varrho$	$-1-4\cdot\varrho$	7	13	21		49	$+69$

$$\text{Reduzierte Form } (1-2\cdot\varrho,\ 7+7\cdot\varrho,\ -1-4\cdot\varrho).$$

$$R = U_2NU_2NU_2U_1NU_1N = \begin{pmatrix} \varrho^2 & -2 \\ 2\varrho^2 & -3+\varrho \end{pmatrix}$$

Dieselbe Bemerkung, die wir in § 26 an die Substitution R geknüpft haben, gilt auch hier.

Wie man sieht, ist in unserm Beispiel $r_1+s_1+r_2+s_2+\cdots = 5$; es ist daher $|R| = -1$, und

$$(1-2\cdot\varrho, 7+7\cdot\varrho, -1-4\cdot\varrho)$$

ist daher nicht eine zu

$$(73-81\cdot\varrho, -27+53\cdot\varrho, 8-33\cdot\varrho)$$

aequivalente reduzierte Form im Sinne der Gruppe Γ_1. Um auf eine solche zu kommen, müssen wir dieselbe nochmals der Substitution U_1 unterwerfen; es ist dann

$$(3+\varrho, 7+7\cdot\varrho, -4-3\cdot\varrho)$$

eine der gewünschten Formen.

[1]) Der Aufbau der Tabelle ist vollständig derselbe wie in § 19 pg. 52.

Zum Schlusse sei noch bemerkt, dass die Diskussion der §§ 20 und 21 fast wörtlich auf die Gruppe Γ_1 übernommen werden kann. Analog wie in dem letzten der beiden bezeichneten Paragraphen kann gezeigt werden: Wenn die Dirichletsche Form $(a\,b\,c)$ so beschaffen ist, dass die Koeffizienten ganze Zahlen aus dem Zahlkörper der dritten Einheitswurzel sind, so gibt es notwendig immer solche Transformationen S, die die Form in sich überführen, wobei S von der identischen Substitution verschieden vorausgesetzt ist. (Wie leicht verifiziert werden kann, tritt in den Bedingungen a und b § 21 an Stelle von $\sqrt{2}\sqrt{3}$.)

Den Gedanken, welchen die vorliegende Arbeit verfolgt, d. i. die Begründung der Theorie der Transformationen einer Form auf eine projektive Invariante, verdanke ich meinem verehrten Lehrer Herrn Prof. Dr. A. Hurwitz. — Hierfür, wie auch für die übrigen freundlichen Ratschläge, möchte ich ihm an dieser Stelle herzlich danken.



\end{document}

Revenue Service. The Foundation's EIN or federal tax identification number is 64-6221541. Its 501(c)(3) letter is posted at http://pglaf.org/fundraising. Contributions to the Project Gutenberg Literary Archive Foundation are tax deductible to the full extent permitted by U.S. federal laws and your state's laws.

The Foundation's principal office is located at 4557 Melan Dr. S. Fairbanks, AK, 99712., but its volunteers and employees are scattered throughout numerous locations. Its business office is located at 809 North 1500 West, Salt Lake City, UT 84116, (801) 596-1887, email business@pglaf.org. Email contact links and up to date contact information can be found at the Foundation's web site and official page at http://pglaf.org

For additional contact information:
Dr. Gregory B. Newby
Chief Executive and Director
gbnewby@pglaf.org

Section 4. Information about Donations to the Project Gutenberg Literary Archive Foundation

Project Gutenberg-tm depends upon and cannot survive without wide spread public support and donations to carry out its mission of increasing the number of public domain and licensed works that can be freely distributed in machine readable form accessible by the widest array of equipment including outdated equipment. Many small donations ($1 to $5,000) are particularly important to maintaining tax exempt status with the IRS.

The Foundation is committed to complying with the laws regulating charities and charitable donations in all 50 states of the United States. Compliance requirements are not uniform and it takes a considerable effort, much paperwork and many fees to meet and keep up with these requirements. We do not solicit donations in locations where we have not received written confirmation of compliance. To SEND DONATIONS or determine the status of compliance for any particular state visit http://pglaf.org

While we cannot and do not solicit contributions from states where we have not met the solicitation requirements, we know of no prohibition against accepting unsolicited donations from donors in such states who approach us with offers to donate.

International donations are gratefully accepted, but we cannot make any statements concerning tax treatment of donations received from outside the United States. U.S. laws alone swamp our small staff.